Radboud Universiteit Nijmegen

Tentamen Calculus 2 NWI-NP004B
28 januari 2013, 8.30–11.30

Het gebruik van een rekenmachine, telefoon en boek(en) is niet toegestaan. Geef precieze argumenten en antwoorden. Maak uw redenering zo helder mogelijk.

---

1. (a) Bepaal de integraal $\displaystyle\int \frac{2}{x^2-4x+3}\,dx$ door middel van partieel breuksplitsen.

   (b) Bepaal of de oneigenlijke integralen $\displaystyle\int_1^2 \frac{2}{x^2-4x+3}\,dx$ en $\displaystyle\int_4^\infty \frac{2}{x^2-4x+3}\,dx$ convergent of divergent zijn.

   (c) Voor welke waarde(s) van $a \in \mathbb{R}$ is de oneigenlijke integraal $\displaystyle\int_4^\infty \frac{ax+2}{x^2-4x+3}\,dx$ convergent?

2. Bepaal van de volgende reeksen het convergentiegedrag:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n^n}}{(n!)^n}, \qquad \sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\,\ln(n)\,\ln(\ln(n))}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$$

3. De oplossing van $x\dfrac{dy}{dx}(x)+y(x)=e^x$, $y(1)=2$ is[1]

   (a) $y(x)=x\displaystyle\int_1^x \frac{e^t}{t}\,dt+2$

   (b) $y(x)=\dfrac{e^x+2-e}{x}$

   (c) $y(x)=e^{-\frac{1}{2}x^2}\displaystyle\int_1^x e^{\frac{1}{2}t^2+t}\,dt+2$

   (d) $y(x)=e^{\frac{1}{2}x^2}\displaystyle\int_1^x e^{-\frac{1}{2}t^2+t}\,dt+2$

4. (a) Bepaal de lengte van de grafiek van de functie $f(x)=\cosh(x)$ voor $x\in[0,2]$.

   (b) Bepaal de oppervlakte van het omwentelingslichaam rond de x-as van $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ over het interval $[0,1]$.

5. Beschouw de differentiaalvergelijking $y''(x)+4y'(x)+5y(x)=f(x)$.

   (a) Los de homogene differentiaalvergelijking (d.w.z. met $f(x)=0$) op.

   (b) Bepaal de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking in het geval $f(x)=e^{-2x}$.

---

[1] Deze vraag is meerkeuze. U hoeft uw antwoord niet te motiveren.

6. Beschouw de machtreeks $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n x^{n+2}}{(n+1)(n+2)}$.

   (a) Bepaal de convergentiestraal R van de machtreeks.

   (b) Bepaal het convergentiegedrag van de machtreeks in de eindpunten $x = R$ en $x = -R$ (onder de aanname dat de convergentiestraal eindig is).

   (c) Geef een expliciete uitdrukking voor de functie op het convergentieinterval $(-R, R)$. (*Hint.* Differentieer de machtreeks tweemaal.)

   (d) Geef de waarde van de machtreeks in de punten R en $-R$ voorzover de machtreeks daar convergent is.

7. De separabele differentiaalvergelijking $\dfrac{dP}{dt}(t) = kP(t)(M - P(t))$ modelleert een populatie waarbij de geboorte(groei)factor $k > 0$ is, maar waarbij de omgeving slechts een populatie van M (groot en positief) van voedsel en leefruimte kan voorzien.

   (a) Zijn er populaties mogelijk die constant zijn (in de tijd t)?

   (b) Los deze vergelijking op met de beginvoorwaarde $P(0) = P_0 \geq 0$.

   (c) Wat is $\lim_{t\to\infty} P(t)$?

8. Bepaal de limiet $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x\sin(x)} - \frac{1}{x^2\cos(x)}$ met behulp van Taylorreeksen.

9. [2] Beschouw de differentiaalvergelijking $x(1-x)y''(x) + (\frac{1}{2} - 3x)y'(x) - y(x) = 0$

   (a) Stel $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ is een oplossing. Bepaal een recurrente betrekking voor de coëfficiënten a_n.

   (b) Bepaal de convergentiestraal voor de oplossing die u bij (a) heeft gevonden.

   (c) Veronderstel dat $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+r}$, $b_0 \neq 0$, een andere oplossing is van de differentiaalvergelijking. Bepaal r.

   (d) Bepaal een recurrente betrekking voor de coëfficiënten b_n voor r als in (c).

   (e) Wat is de convergentiestraal van de machtreeks $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$?

Normering

Opgave	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Gratis	Totaal
Punten	10	15	6	8	8	10	10	8	15	10	100

Het tentamencijfer T is de gebruikelijke afronding van het totaal aantal behaalde punten gedeeld door 10

[2] Voor deze opgave scoort u minimaal $H \cdot 15/10$ punten, mits uw gemiddelde huiswerkcijfer $H \geq 6.0$ is.

Opgave 1.

(a) Merk op dat $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$, en dus kunnen we door partieel breuksplitsen integreren. Bepaal A en B in

$$\frac{2}{x^2 - 4x + 3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-3}$$

door uit te vermenigvuldigen $2 = A(x-3) + B(x-1) = (A+B)x - 3A - B$. Dus $A + B = 0$ en $-3A - B = 2$. Dat geeft $A = -1$, $B = 1$, en dus

$$\int \frac{2}{x^2 - 4x + 3}\,dx \;=\; \int \frac{-1}{x-1} + \frac{1}{x-3}\,dx \;=$$
$$-\ln|x-1| + \ln|x-3| + C \;=\; \ln\left(\frac{|x-3|}{|x-1|}\right) + C$$

(b) Merk op dat de singulariteit bij 1 is, en daar gedraagt de integrand zich als $\frac{1}{x-1}$, en dus is deze integraal divergent. (Op een andere manier kun je dat zien door

$$\lim_{a\downarrow 1} \int_a^2 \frac{2}{x^2 - 4x + 3}\,dx \;=\; \ln\left(\frac{|2-3|}{|2-1|}\right) - \ln\left(\frac{|a-3|}{|a-1|}\right)$$

en deze limiet bestaat niet.) Bekijk nu

$$\lim_{N\to\infty} \int_4^N \frac{2}{x^2 - 4x + 3}\,dx = \lim_{N\to\infty} \ln\left(\frac{|N-3|}{|N-1|}\right) - \ln\left(\frac{1}{3}\right) = \ln(1) + \ln(3) = \ln(3)$$

en dus is deze integraal convergent.

(c) Het geval $a = 0$ hebben we boven gedaan. Voor $a \neq 0$ vinden we dat voor $x \to \infty$ de functie

$$\frac{ax + 2}{x^2 - 4x + 3} \sim a\frac{1}{x}$$

en deze geeft een divergente oneigenlijke integraal op $[4, \infty)$. Dus de integraal is alleen convergent voor $a = 0$.

Opgave 2. Pas het wortelkenmerk toe, en dan

$$\sqrt[n]{\left|(-1)^n \frac{\sqrt{n^n}}{(n!)^n}\right|} = \frac{\sqrt{n}}{n!} = \frac{\sqrt{n}}{n}\,\frac{1}{(n-1)!} \to 0 \qquad n \to \infty$$

en dus is de reeks absoluut convergent. (Alternatief: het quotiëntenkenmerk kan ook worden gebruikt door

$$\left|\frac{(-1)^{n+1}\frac{\sqrt{(n+1)^{n+1}}}{((n+1)!)^{n+1}}}{(-1)^n\frac{\sqrt{n^n}}{(n!)^n}}\right| = \left|\frac{\sqrt{(n+1)^{n+1}}(n!)^n}{\sqrt{n^n}((n+1)!)^{n+1}}\right| = \frac{\sqrt{(1+\frac{1}{n})^n}\sqrt{1+n}}{n!\,(n+1)^{n+1}}$$
$$= \frac{\sqrt{(1+\frac{1}{n})^n}}{\sqrt{1+n}\;n!\,(n+1)^n} \to 0 \qquad n\to\infty$$

want de teller gaat naar $\sqrt{e}$ en is dus begrensd, en de noemer gaat naar ∞. NB Het is ook mogelijk deze reeks met een geschikte meetkundige reeks te vergelijken.)

Pas het integraalkenmerk toe, zodat we (voor n voldoende groot, en dat is 3) moeten vergelijken met de convergentie van de integraal (en merk op dat $f(x) = \frac{1}{x\,\ln(x)\,\ln(\ln(x))}$ inderdaad positief en monotoon dalend is op $[3,\infty)$)

$$\int_3^\infty \frac{1}{x\,\ln(x)\,\ln(\ln(x))}\,dx = \int_{\ln(3)}^\infty \frac{1}{u\ln(u)}\,du = \int_{\ln\ln(3)}^\infty \frac{1}{t}\,dt$$

(door successieve substitutie $\ln(x)=u$ en $\ln(u)=t$) en deze integraal is divergent. Dus de reeks is divergent.

Merk op dat $\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$ een alternerende reeks is. Stel $a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$, dan is $a_n > 0$, $a_{n+1} \le a_n$ en $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Volgens het kenmerk voor alternerende reeksen is deze reeks convergent. De reeks is niet absoluut convergent, want

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{1/3}}$$

is divergent ($\frac{1}{3} \le 1$ of via het integraalkenmerk). Dus de reeks is voorwaardelijk convergent.

Opgave 3. Het juiste antwoord is $y(x) = \frac{e^x+2-e}{x}$.

Immers, $x\frac{dy}{dx}(x) + y(x) = e^x$ kun je schrijven als $(xy(x))' = e^x$, ofwel de integrerende factor is triviaal, en dus

$$xy(x) = e^x + C \qquad \Longrightarrow \qquad y(x) = \frac{e^x+C}{x}$$

en $y(1) = 2$ geeft $C = 2-e$.

Opgave 4.

(a) Als $f(x) = \cosh(x)$, dan $f'(x) = \sinh(x)$. De gevraagde lengte is dan

$$L = \int_0^2 \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx = \int_0^2 \sqrt{1+(\sinh(x))^2}\,dx = \int_0^2 \sqrt{\cosh^2(x)}\,dx = \int_0^2 \cosh(x)\,dx =$$
$$\sinh(x)\Big|_0^2 = \sinh(2) - \sinh(0) = \frac{e^2-e^{-2}}{2}.$$

(b) Stel $f(x) = \sqrt{4-x^2}$, dan $f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}$, en het oppervlak is dan

$$\begin{aligned}\text{Opp} = 2\pi \int_0^1 f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx &= 2\pi \int_0^1 \sqrt{4-x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{4-x^2}}\,dx \\ = 2\pi \int_0^1 \sqrt{4-x^2+x^2}\,dx &= 2\pi \int_0^1 \sqrt{4} = 4\pi\end{aligned}$$

(Het al dan niet meenemen van de zijkanten wordt niet beoordeeld.)

Opgave 5.

(a) Bekijk de bijbehorende karakteristieke vergelijking;

$$0 = r^2 + 4r + 5 = (r+2)^2 + 1 \qquad \Longrightarrow \qquad r = -2 \pm i$$

zodat we de algemene oplossing krijgen

$$y(x) = A_1 e^{-2x}\cos(x) + A_2 e^{-2x}\sin(x), \qquad A_1, A_2 \in \mathbb{R}.$$

(b) Aangezien $f(x)$ (als exponentiële functie) niet bevat is in de oplossing van de homogene vergelijking, proberen we als particuliere oplossing $y(x) = Ae^{-2x}$, en dan $y'(x) = -2Ae^{-2x}$, $y''(x) = 4Ae^{-2x}$. Invullen geeft

$$4Ae^{-2x} - 8Ae^{-2x} + 5Ae^{-2x} = Ae^{-2x}$$

en dit moet gelijk zijn aan e^{-2x}, dus neem $A = 1$. Dus de algemene oplossing is

$$y(x) = e^{-2x} + A_1 e^{-2x}\cos(x) + A_2 e^{-2x}\sin(x), \qquad A_1, A_2 \in \mathbb{R}.$$

Opgave 6.

(a) Gebruik het quotiëntenkenmerk

$$\left|\frac{\frac{(-2)^{n+1}x^{n+3}}{(n+2)(n+3)}}{\frac{(-2)^n x^{n+2}}{(n+1)(n+2)}}\right| = \frac{2|x|(n+1)}{(n+3)} \to 2|x|, \qquad n \to \infty$$

dus als $2|x| < 1$ (ofwel $|x| < \frac{1}{2}$), dan convergeert de reeks absoluut, en de reeks divergeert voor $2|x| > 1$ (ofwel $|x| > \frac{1}{2}$). Dus $R = \frac{1}{2}$. (Alternatief: het wortelkenmerk kan ook toegepast worden.)

(b) Voor $x = \frac{1}{2}$ wordt de reeks $\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)}$, en deze is absoluut convergent. Immers,

$$\left|\frac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)}\right| \leq \frac{1}{(n+1)^2}$$

en de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ is convergent. Voor $x = -\frac{1}{2}$ wordt de reeks $\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ en deze is absoluut convergent.

(c) Differentieer de reeks tweemaal termsgewijs, dan krijgen we

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)\frac{(-2)^n x^n}{(n+1)(n+2)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-2x)^n = \frac{1}{1+2x}$$

door gebruik te maken van de meetkundige reeks. Door dan twee keer te integreren krijgen we dat de machtreeks overeen moet stemmen met

$$\int \frac{1}{1+2x}\,dx = \frac{1}{2}\ln(1+2x)+C, \qquad \Longrightarrow$$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{2}\ln(1+2x)+C\,dx &= \frac{1}{4}(1+2x)\ln(1+2x) - \int \frac{1}{4}(1+2x)\frac{2}{1+2x}\,dx + Cx \\ &= \frac{1}{4}(1+2x)\ln(1+2x) - \frac{1}{2}x + D + Cx\end{aligned}$$

met C en D constantes. We vinden dus

$$\frac{1}{4}(1+2x)\ln(1+2x) - \frac{1}{2}x + D + Cx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n x^{n+2}}{(n+1)(n+2)}$$

Neem eerst $x=0$, zodat $D=0$. Neem vervolgens aan beide zijden de afgeleide, en neem $x=0$ om te vinden

$$\Big(\frac{1}{2}\ln(1+2x)+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\Big)|_{x=0}+C=0.$$

Dus ook $C=0$ en we vinden

$$\frac{1}{4}(1+2x)\ln(1+2x) - \frac{1}{2}x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n x^{n+2}}{(n+1)(n+2)}.$$

(d) We vullen $x=\frac{1}{2}$ in;

$$\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)} = \Big(\frac{1}{4}(1+2x)\ln(1+2x)-\frac{1}{2}x\Big)|_{x=\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}2\ln(2)-\frac{1}{4} = \frac{1}{2}(\ln(2)-\frac{1}{2})$$

We vullen $x=-\frac{1}{2}$ in;

$$\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \Big(\frac{1}{4}(1+2x)\ln(1+2x)-\frac{1}{2}x\Big)|_{x=-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$$

(door gebruik te maken van $\lim_{x\downarrow 0} x\ln(x)=0$.)

(Alternatief: Door gebruik te maken van

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$$

zien we dat

$$\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{1}{4}\Big(1-\frac{1}{N+2}) \to \frac{1}{4}, \qquad N\to\infty$$

en

$$\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+2)}\Big) = \frac{1}{4}(\ln(2)+\ln(2)-1)$$

want $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)} = \ln(2)$.

Opgave 7.

(a) Dit gebeurt als $\frac{dP}{dt} = 0$, dus als $P = 0$ of $P = M$. Dus de constante oplossingen zijn $P(t) = 0$ (geen populatie) of $P(t) = M$ voor alle t.

(b) Gebruik dat de differentiaalvergelijking separabel is;

$$\begin{aligned}
\frac{1}{P(t)(M-P(t))}\frac{dP}{dt}(t) = k &\qquad \Longrightarrow\\
\int \frac{1}{P(M-P)}\,dP = \int k\,dt &\qquad \Longrightarrow\\
\frac{1}{M}\int \frac{1}{P} + \frac{1}{M-P}\,dP = kt + C &\qquad \Longrightarrow\\
\frac{1}{M}\Big(\ln|P| - \ln|M-P|) = kt + C &\qquad \Longrightarrow\\
\ln\Big(\frac{|P|}{|M-P|}\Big) = kMt + C &\qquad \Longrightarrow\\
\frac{P(t)}{M-P(t)} = Ce^{kMt} &\qquad \Longrightarrow\\
P(t) = Ce^{kMt}(M-P(t)) &\qquad \Longrightarrow\\
P(t) + Ce^{kMt}P(t) = CMe^{kMt} &\qquad \Longrightarrow\\
P(t) = \frac{CMe^{kMt}}{1+Ce^{kMt}} &
\end{aligned}$$

(hierin zijn de C's generieke, mogelijk verschillende constantes) en dan is $P(0) = \frac{CM}{1+C} = P_0$ ofwel $C = \frac{P_0}{M-P_0}$ (en dit is goed gedefinieerd tenzij $P_0 = M$, en dan is de oplossing $P(t) = M$ voor alle t, zie (a)). Dus de oplossing is

$$P(t) = \frac{P_0Me^{kMt}}{M-P_0+P_0e^{kMt}}$$

en dit is ook gedefinieerd voor $P_0 = M$.

(Alternatief: stel $Q(t) = \frac{1}{P(t)}$, dan

$$\frac{dQ}{dt}(t) = \frac{-1}{P(t)^2}\frac{dP}{dt}(t) = \frac{-1}{P(t)^2}k\,P(t)(M - P(t)) = k - \frac{kM}{P(t)} = k - kM\,Q(t)$$

en dit is een lineaire eerste orde differentiaalvergelijking. Zoek een integrerende factor

$$Q'(t) + kMQ(t) = k \quad \Longrightarrow \quad i(t)\,Q'(t) + i(t)\,kMQ(t) = ki(t) \quad \Longrightarrow$$
$$\text{dus nodig} \quad i(t)\,kM = i'(t) \quad \Longrightarrow \quad i(t) = e^{kMt}.$$

Dan wordt de differentiaalvergelijking

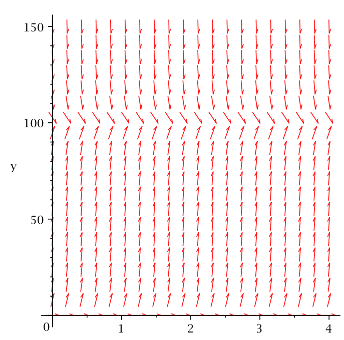
$$\left(e^{kMt}Q(t)\right)' = ke^{kMt} \quad \Longrightarrow \quad e^{kMt}Q(t) = \frac{1}{M}e^{kMt} + C \quad \Longrightarrow$$
$$Q(t) = \frac{1}{M} + Ce^{-kMt} \quad \Longrightarrow \quad P(t) = \frac{1}{\frac{1}{M} + Ce^{-kMt}} = \frac{M}{1 + CMe^{-kMt}}$$

en dit is dezelfde oplossing.)

(c) Nu is voor $P_0 > 0$

$$P(t) = \frac{P_0 M}{(M - P_0)e^{-kMt} + P_0} \to \frac{P_0 M}{P_0} = M$$

als $t \to \infty$. Als $P_0 = 0$, dan $\lim_{t\to\infty} P(t) = \lim_{t\to\infty} 0 = 0$.
Dit is ook te zien aan de schets van het richtingenveld.



Figuur 1: Richtingenveld, $k = 0.2$, $M = 100$ voor opgave 7.

(Dus uiteindelijk zal de populatie stabiel worden bij het maximale quotum tenzij er geen populatie is.)

Opgave 8. Herschrijf met behulp van Taylorreeksen

$$\frac{1}{x\sin(x)} - \frac{1}{x^2\cos(x)} = \frac{x^2\cos(x) - x\sin(x)}{x^3\sin(x)\cos(x)} = 2\frac{x\cos(x) - \sin(x)}{x^2\sin(2x)} =$$

$$2\frac{x(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \cdots) - (x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \cdots)}{x^2(1 - 2x^2 + \frac{16}{24}x^4 + \cdots 0} =$$

$$2\frac{(\frac{1}{6} - \frac{1}{2})x^3 + \cdots}{x^2(2x - \frac{8}{6}x^3 + \cdots)}$$

Teller en noemer delen door x^3 en dan limiet nemen voor $x \to 0$ geeft

$$\lim_{x\downarrow 0} \frac{1}{x\sin(x)} - \frac{1}{x^2\cos(x)} = 2\frac{(\frac{1}{6} - \frac{1}{2})}{2} = -\frac{1}{3}$$

Opgave 9.

(a) Vul in

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \qquad y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$$

dat geeft

$$0 = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - 3\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \implies$$

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)a_{n+1} x^n - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1} x^n - 3\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \implies$$

$$0 = \sum_{n=0}^{\infty} n(n+1)a_{n+1} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^n + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1} x^n - 3\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

door de sommaties te verschuiven, en dan de sommaties aan te passen (alle termen die daarmee overeenstemmen zijn toch 0). Dit geeft de recurrente betrekking door de coëfficiënten van x^n nul te stellen;

$$0 = n(n+1)a_{n+1} - n(n-1)a_n + \frac{1}{2}(n+1)a_{n+1} - 3na_n - a_n \implies$$

$$n(n+1)a_{n+1} + \frac{1}{2}(n+1)a_{n+1} = n(n-1)a_n + 3na_n + a_n \implies$$

$$(n+1)(n+\frac{1}{2})a_{n+1} = (n^2 + 2n + 1)a_n \implies$$

$$(n+1)(n+\frac{1}{2})a_{n+1} = (n+1)^2 a_n \implies$$

$$(n+\frac{1}{2})a_{n+1} = (n+1)a_n \implies$$

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)}{(n+\frac{1}{2})}a_n$$

voor elke $n \in \mathbb{N}$.

(b) Gebruik het quotiëntenkenmerk:

$$\frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = |x|\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |x|\frac{(n+1)}{(n+\frac{1}{2})} \to |x|, \qquad n \to \infty$$

dus de convergentiestraal is 1.

(c) Vul in

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+r}, \qquad y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)b_n x^{n+r-1}, \qquad y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)b_n x^{n+r-2}$$

dat geeft

$$0 = \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)b_n x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)b_n x^{n+r} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)b_n x^{n+r-1} - 3\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)b_n x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+r} \qquad \Longrightarrow$$

$$0 = b_0 r(r-1)x^{r-1} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+1+r)(n+r)b_{n+1}x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)b_n x^{n+r} + \frac{1}{2}b_0 r x^{r-1} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1+r)b_{n+1}x^{n+r} - 3\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)b_n x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+r}.$$

Alle machten van x moeten coëfficiënten gelijk aan 0 hebben. In het bijzonder die van x^{r-1};

$$0 = b_0 r(r-1) + \frac{1}{2}b_0 r = b_0 r(r - \frac{1}{2})$$

omdat $b_0 \neq 0$ volgt $r = 0$ (hetgeen leidt tot de machtreeksoplossing van (a)) of $r = \frac{1}{2}$. Dus $r = \frac{1}{2}$.

(d) Met de keuze $r = \frac{1}{2}$ moeten ook de coëfficiënten van de machten van $x^{n+\frac{1}{2}}$ ($n \in \mathbb{N}$) gelijk zijn aan 0, dat geeft

$$0 = (n+\frac{3}{2})(n+\frac{1}{2})b_{n+1} - (n+\frac{1}{2})(n-\frac{1}{2})b_n + \frac{1}{2}(n+\frac{3}{2})b_{n+1} - 3(n+\frac{1}{2})b_n - b_n \qquad \Longrightarrow$$

$$(n+\frac{3}{2})(n+1)b_{n+1} = \big((n+\frac{1}{2})(n-\frac{1}{2}) + 3(n+\frac{1}{2}) + 1\big)b_n \qquad \Longrightarrow$$

$$(n+\frac{3}{2})(n+1)b_{n+1} = \big(n+\frac{3}{2}\big)^2 b_n \qquad \Longrightarrow$$

$$(n+1)b_{n+1} = (n+\frac{3}{2})b_n$$

(e) Gebruik het quotiëntenkenmerk:

$$\frac{|b_{n+1}x^{n+1}|}{|b_n x^n|} = |x|\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = |x|\frac{(n+\frac{3}{2})}{(n+1)} \to |x|, \qquad n \to \infty$$

dus de convergentiestraal is 1.

(Conclusie: we hebben twee verschillende oplossingen van deze differentiaalvergelijking gevonden.)