Radboud Universiteit Nijmegen

Tentamen Calculus 2 NWI-NP004B
3 april 2013, 8.30–11.30

Het gebruik van een rekenmachine, telefoon en boek(en) is niet toegestaan. Geef precieze argumenten en antwoorden. Maak uw redenering zo helder mogelijk.

---

1. Bepaal van de volgende reeksen het convergentiegedrag:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k}{k+1}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-\ln(k)}{k^2+\ln(k)}, \qquad \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\,(\ln(k))^{3/2}}.$$

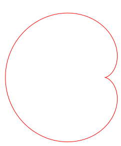
2. De oplossing van $\frac{dy}{dx}(x) + \tan(x)\,y(x) = \cos^2(x)$, $y(0) = 1$ is[1]

   (a) $y(x) = \cos(x)\,\sin(x) + \cos(x)$

   (b) $y(x) = \tan(x) + \cos(2x)$

   (c) $y(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$

   (d) $y(x) = -\frac{1}{2}\sin(2x) + \cos(x)$



3. Hiernaast ziet u de de cardïode, die in poolcoördinaten gegeven wordt door $r = 1 - \cos(\theta)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

   (a) Bepaal de oppervlakte ingesloten door de cardïode.

   (b) Bereken de lengte van de cardïode.

4. Bepaal $\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos\theta}\,d\theta$. (Hint. Een mogelijke oplossing gebruikt de substitutie $u = \tan(\frac{1}{2}\theta)$ zodat $\cos\theta = \frac{1-u^2}{1+u^2}$ en partiële breuksplitsing.)

5. (a) De uitwijking $x(t)$ op tijdstip t van een ongedempte veer met een oscillerende aandrijfterm wordt gemodelleerd door $m\frac{d^2x}{dt^2}(t) + kx(t) = F\cos(\omega t)$ (met $m > 0$ de massa en $k > 0$ de veerconstante). Voor welke waarde(n) van ω ondergaat de veer resonantie (dwz is er een oplossing waarvoor $x(t)$ willekeurig groot wordt voor bepaalde tijdstippen)?

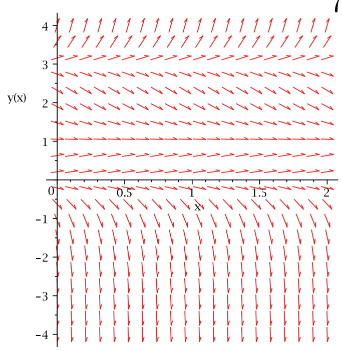
   (b) Beschouw de tweede orde lineaire differentiaalvergelijking $\frac{d^2y}{dx^2}(x) + 8\frac{dy}{dx}(x) + 25y(x) = 8\sin(x)$. Bepaal de algemene oplossing.

[1] Deze vraag is meerkeuze. U hoeft uw antwoord niet te motiveren.

6. Beschouw $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{\sqrt{2n+5}}(x+5)^n$.

   (a) Bepaal de convergentiestraal R van deze Taylorreeks, en geef aan op welk open interval de reeks absoluut convergent is.

   (b) Bepaal het convergentiegedrag van de Taylorreeks in de randpunten van het interval dat u bij (a) heeft bepaald.



7. Het een richtingenveld van de eerste orde differentiaalvergelijking $\dfrac{dy}{dx}(x) = y^3(x) - 4y^2(x) + 3y(x)$ is hiernaast gegeven.

   (a) Voor welke waarden van C is $y(x) = C$ een constante oplossing van de differentiaalvergelijking?

   (b) Geef voor elk van de mogelijkheden uit (a) aan voor welke $y_0 \in \mathbb{R}$ geldt dat de oplossing van de differentiaalvergelijking met beginvoorwaarde $y(0) = y_0$ voldoet aan $\lim_{x\to\infty} y(x) = C$.

8. (a) Bepaal de Taylorontwikkeling van $F(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^3}\,dt$ rond $x = 0$.

   (b) Bepaal $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{F(x) - x}{x^2\,\sin(x^2)}$.

9. [2] Beschouw $y''(x) - 2xy'(x) + \lambda y(x) = 0$ waarbij λ een reëel getal is.

   (a) Veronderstel dat $y(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ een oplossing is. Bepaal de recurrente betrekking voor de coëfficiënten a_n.

   (b) Laat zien dat er een twee-dimensionale ruimte van machtreeksoplossingen van de differentiaalvergelijking is.

   (c) Bepaal de convergentiestraal van de machtreeksen uit (b).

   (d) Voor welke waarden van λ heeft de differentiaalvergelijking polynomen als oplossing?

Normering											
Opgave	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Gratis	Totaal
Punten	15	6	8	10	10	10	8	8	15	10	100

Het tentamencijfer T is de gebruikelijke afronding van het totaal aantal behaalde punten gedeeld door 10

[2]Voor deze opgave scoort u minimaal $H \cdot 15/10$ punten, mits uw gemiddelde huiswerkcijfer $H \geq 6.0$ is.