Radboud Universiteit Nijmegen

Tentamen Calculus 1 NWI-NP003B
7 januari 2015, 18:00–21.00

Het gebruik van een rekenmachine/GR, telefoon, boek, aantekeningen e.d. is niet toegestaan. Geef precieze argumenten en antwoorden. Zorg dat uw redeneringen en schrijfstijl helder en beknopt zijn. Noteer op elk vel uw naam en studentnummer.
In geval uw huiswerkcijfer $H \geq 6.0$ scoort u minimaal $15H/10$ voor opgave 9.

---

1. (a) Gegeven $z = \sqrt{2}e^{i\frac{3}{4}\pi}$, $w = 1 - i\sqrt{3}$. Bereken $\dfrac{\overline{z}}{w}$.
   (b) Factoriseer $p(z) = -18 + 9z - 2z^2 + z^3$ in lineaire factoren over de complexe getallen. (*Hint.* Beschouw $p(3i)$.)

2. Definieer de functie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ door $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.
   (a) Bepaal de afgeleide van f.
   (b) Bepaal het bereik van f.
   (c) Laat zien dat f inverteerbaar is, en bepaal de inverse van f inclusief het domein van f^{-1}.

3. f, g zijn differentieerbare functies. Bepaal de afgeleide van $F(x) = f\left(\sqrt{\left(g(x)\right)^2 + 5}\right)$.

4. Bepaal de volgende integralen:

$$\int_1^e x^2(\ln(x))^2\,dx \qquad\qquad \int_0^1 \frac{x^3+2x+1}{x^2+1}\,dx$$

5. Gegeven is dat de kromme $\arcsin(x^2y) = xy^2 + \dfrac{1}{4}\pi - 4$ rond het punt $(\frac{1}{2}, 2\sqrt{2})$ lokaal de grafiek is van y als functie van x. Bepaal de raaklijn door $(\frac{1}{2}, 2\sqrt{2})$.

6. Stel $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^2}$ met domein $(0, \infty)$.
   (a) Bepaal de nulpunten van f, en geef aan waar f positief/negatief is.
   (b) Heeft f (scheve/horizontale/verticale) asymptoten?
   (c) Bepaal de afgeleide van f.
   (d) Bepaal de extreme waarden (maxima/minima en lokaal/globaal) van f.
   (e) Waar is f concaaf naar boven en concaaf naar beneden?

!!ZOZ Op de achterkant staan ook nog opgaven ZOZ!!

7. Bepaal het Maclaurin polynoom (i.e. Taylor polynoom rond $x = 0$) van $f(x) = e^{-x^4}$ van graad 12.

8. [1] Beschouw de volgende oneigenlijke integralen

$$\text{(I)}: \quad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx, \qquad\qquad \text{(II)}: \int_0^\infty \frac{x^3+5x+3}{x\sqrt{x^6+4x^2+5}}\,dx$$

Welke uitspraak is waar:

(a) (I) en (II) zijn beide convergent.
(b) (I) is convergent en (II) is divergent.
(c) (I) is divergent en (II) is convergent.
(d) (I) en (II) zijn beide divergent.

9. [2]

(a) Formuleer de Stelling van Rolle.
(b) Veronderstel dat f en g continu zijn op $[a, b]$ en differentieerbaar op (a, b) en dat $g'(x) \neq 0$ voor alle $x \in (a, b)$. Dan geldt dat er een $c \in (a, b)$ bestaat zodanig dat

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Bewijs deze uitspraak, die bekend staat als de gegeneraliseerde middelwaardestelling met behulp van (a).
(c) De gewone middelwaardestelling correspondeert met $g(x) = x$. Op de Olympische Spelen 2012 in Londen won Usain Bolt de 100 meter sprint in 9.63 seconden. Dat is een gemiddelde snelheid van 10.384 m/s (ofwel 37.38 km/h). Laat zien dat er een tijdstip $t_0 \in (0, 9.63)$ is waarop Usain Bolt de snelheid 37.38 km/h heeft.
(d) Asafa Powell liep dezelfde race in 11.99 (hij remde af voor het eind in verband met een blessure). Dus Bolt was 1.245 keer zo snel als Powell. Laat zien dat er een plaats $x_0 \in (0, 100)$ op de baan is waarop de snelheid van Bolt inderdaad precies 1.245 keer de snelheid van Powell was.

Normering											
Opgave	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Gratis	Totaal
Punten	10	12	6	12	6	16	8	5	15	10	100

Het eindcijfer T is de gebruikelijke afronding van het totaal aantal behaalde punten gedeeld door 10 naar hele en halve cijfers (met uitzondering van 5.5), waarin een eventueel huiswerkcijfer wordt meegenomen in de beoordeling van opgave 9.

[1] Bij deze vraag kunt u gokken. Een fout antwoord geeft aftrek, géén antwoord geeft geen aftrek. Alleen het antwoord van deze opgave telt.

[2] Voor deze opgave scoort u minimaal $H \cdot 15/10$ punten, mits uw gemiddelde huiswerkcijfer $H \geq 6.0$ is.

Uitwerkingen en hints

Opgave 1.

(a) Gegeven $z = \sqrt{2}e^{i\frac{3}{4}\pi}$, $w = 1 - i\sqrt{3}$, en voor het bepalen van het quotiënt moeten we z in Cartesische coördinaten of w in poolcoördinaten schrijven. In geval van het laatste, $w = 2e^{-i\frac{1}{3}\pi}$ en dan

$$\frac{\overline{z}}{w} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{3}{4}\pi + i\frac{1}{3}\pi} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{5}{12}\pi}$$

Alternatief: schrijf z in Cartesische coördinaten,

$$z = \sqrt{2}(\cos(\frac{3}{4}\pi) + i\sin(\frac{3}{4}\pi)) = \sqrt{2}(-\frac{1}{2}\sqrt{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{2}) = -1 + i$$

en dan

$$\frac{\overline{z}}{w} = \frac{-1-i}{1-i\sqrt{3}} = \frac{-1-i}{1-i\sqrt{3}}\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}} =$$
$$\frac{1}{4}\Big(-1+\sqrt{3}+i(-1-\sqrt{3})\Big) = \frac{1}{4}(-1+\sqrt{3}) - i\frac{1}{4}(1+\sqrt{3})$$

(b) Directe berekening laat zien dat

$$p(3i) = -18 + 9(3i) - 2(3i)^2 + (3i)^3 = -18 + 27i + 18 - i27 = 0$$

en omdat p reële coëfficiënten heeft, volgt ook dat $p(-3i) = 0$. Dus is $(z-3i)(z+3i) = z^2 + 9$ een factor in $p(z)$, en er resteert een lineaire factor;

$$-18 + 9z - 2z^2 + z^3 = p(z) = (z^2+9)(Az+B)$$

vergelijken van leidende en constante coëfficiënt geeft $A = 1$, $B = -2$ (en staartdelen kan ook). Dus

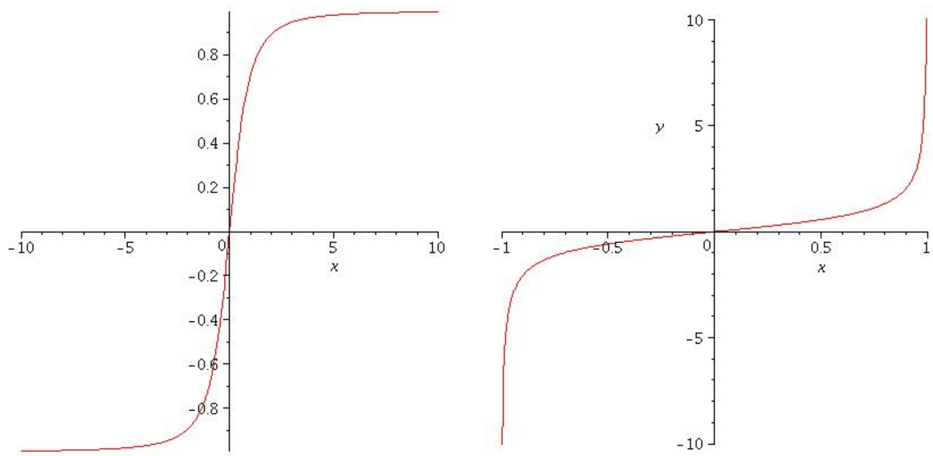
$$p(z) = (z^2+9)(z-2) = (z-3i)(z+3i)(z-2)$$

Opgave 2. Definieer $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ door $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

(a)

$$f'(x) = \frac{\sqrt{1+x^2} - x\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} = \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$$

Merk op dat $f'(x) > 0$ op het domein $\mathbb{R}$, zodat f strikt monotoon stijgend is.



Figuur 1: De grafiek van de functie f (links) en de inverse functie f^{-1} (rechts) van opgave 2.

(b) Omdat f strikt monotoon stijgend is, bekijken we de limiet naar de grenzen van het domein van f;

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{|x|\sqrt{1+x^{-2}}} = 1,$$
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{|x|\sqrt{1+x^{-2}}} = -1$$

Het bereik is dus $(-1, 1)$.

(c) Omdat f strikt monotoon stjgend is op $\mathbb{R}$, is f injectief (of 'one-to-one'), en dus is f inverteerbaar. Het domein van f^{-1} is het bereik van f, dus $(-1, 1)$. Het bereik van f^{-1} is het domein $\mathbb{R}$ van f.

Voor de expliciete vorm van de inverse,

$$f^{-1}(x) = y \iff f(y) = x \iff \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} = x$$
$$\implies \sqrt{1+y^2} = \frac{y}{x} \implies 1 + y^2 = \frac{y^2}{x^2}$$
$$\implies 1 = y^2(\frac{1}{x^2} - 1) \implies y^2 = \frac{1}{\frac{1}{x^2} - 1} = \frac{x^2}{1 - x^2}$$

Merk op dat $f(x) = 0$ alleen voor $x = 0$, en dat $x > 0$ impliceert $f(x) > 0$ en $x < 0$ impliceert $f(x) < 0$. Dus voor de berekening van de inverse functie moeten we voor y

en x hetzelfde teken hebben (want $1-x^2>0$ voor $x\in(-1,1)$). Dus

$$y=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad\Longrightarrow\quad f^{-1}(x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Extra: merk op dat inderdaad geldt:

$$\lim_{x\downarrow -1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=-\infty, \qquad \lim_{x\uparrow 1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=+\infty$$

Een directe verificatie kan ook worden gedaan; bv

$$f(f^{-1}(x))=\frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}}=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}}=\frac{x}{\sqrt{1-x^2+x^2}}=x$$

Opgave 3. Herhaaldelijk toepassen van de kettingregel:

$$\begin{aligned}
F'(x)&=f'\Big(\sqrt{\big(g(x)\big)^2+5}\Big)\cdot\Big(\sqrt{\big(g(x)\big)^2+5}\Big)'\\
&=f'\Big(\sqrt{\big(g(x)\big)^2+5}\Big)\cdot\frac{1}{2\sqrt{\big(g(x)\big)^2+5}}\cdot\Big(\big(g(x)\big)^2+5\Big)'\\
&=f'\Big(\sqrt{\big(g(x)\big)^2+5}\Big)\cdot\frac{1}{2\sqrt{\big(g(x)\big)^2+5}}\cdot\big(2g(x)g'(x)\big)
\end{aligned}$$

Opgave 4. Met behulp van partiële integratie (twee keer) (vgl Example 5, Sectie 6.1, p.336)

$$\int_1^e \underbrace{x^2}_{f'}\underbrace{(\ln(x))^2}_{g}\,dx \;=\; \underbrace{\frac{1}{3}x^3}_{f}\underbrace{(\ln(x))^2}_{g}\Big|_1^e-\int_1^e \underbrace{\frac{1}{3}x^3}_{f}\underbrace{2(\ln(x))\frac{1}{x}}_{g'}\,dx$$

$$=\frac{1}{3}e^3-\frac{2}{3}\int_1^e \underbrace{x^2}_{f'}\underbrace{\ln(x)}_{g}\,dx \;=\; \frac{1}{3}e^3-\frac{2}{3}\left(\underbrace{\frac{1}{3}x^3}_{f}\underbrace{\ln(x)}_{g}\Big|_1^e-\int_1^e\underbrace{\frac{1}{3}x^3}_{f}\underbrace{\frac{1}{x}}_{g'}\,dx\right)$$

$$=\frac{1}{3}e^3-\frac{2}{3}\frac{1}{3}e^3+\frac{2}{3}\frac{1}{3}\int_1^e x^2\,dx \;=\; \frac{1}{9}e^3+\frac{2}{9}\frac{1}{3}x^3\Big|_1^e=\frac{1}{9}e^3+\frac{2}{27}e^3-\frac{2}{27}=\frac{5}{27}e^3-\frac{2}{27}.$$

Voor de andere integraal moeten we de rationale integrand herschrijven. Merk op dat

$$\frac{x^3+2x+1}{x^2+1}=\frac{x(x^2+1)+x+1}{x^2+1}=x+\frac{x+1}{x^2+1}=x+\frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+1}+\frac{1}{x^2+1}, \quad\Longrightarrow$$

$$\int_0^1\frac{x^3+2x+1}{x^2+1}\,dx=\int_0^1 x\,dx+\frac{1}{2}\int_0^1\frac{2x}{x^2+1}\,dx+\int_0^1\frac{1}{x^2+1}\,dx=$$

$$\frac{1}{2}x^2\Big|_0^1+\frac{1}{2}\int_1^2\frac{1}{u}\,du+\arctan(x)\Big|_0^1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln(u)\Big|_1^2+\frac{1}{4}\pi=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln(2)+\frac{1}{4}\pi$$

waarbij $u = x^2 + 1$ met $du = 2x\,dx$ hebben gesubstitueerd.

Opgave 5. Het is voldoende de afgeleide voor de raaklijn te vinden, want we weten al dat $(\frac{1}{2}, 2\sqrt{2})$ op de lijn ligt. Impliciet differentiëren geeft

$$\arcsin(x^2y) = xy^2 + \frac{1}{4}\pi - 4 \quad \Longrightarrow$$
$$\frac{1}{\sqrt{1-(x^2y)^2}}(2xy + x^2y') = y^2 + 2xyy'$$

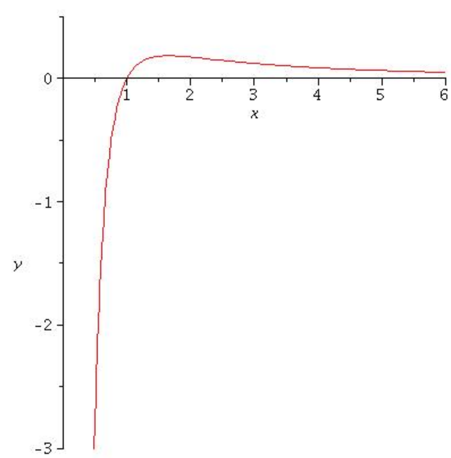
en $(x, y) = (\frac{1}{2}, 2\sqrt{2})$ invullen geeft

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{2}}}(2\sqrt{2} + \frac{1}{4}y') = 8 + 2\sqrt{2}y' \quad \Longrightarrow \quad (4 + \frac{1}{4}\sqrt{2}y') = 8 + 2\sqrt{2}y' \quad \Longrightarrow$$
$$-4 = \frac{7}{4}\sqrt{2}y' \quad \Longrightarrow \quad y' = -\frac{16}{7\sqrt{2}} = -\frac{8}{7}\sqrt{2}$$

Dus is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn gelijk aan $-\frac{8}{7}\sqrt{2}$. De raaklijn is dan

$$y - 2\sqrt{2} = -\frac{8}{7}\sqrt{2}(x-1)$$

Opgave 6. Stel $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^2}$ met domein $(0, \infty)$



Figuur 2: De grafiek van de functie f van opgave 6.

(a) $f(x) = 0$ dan en slechts dan als $\ln(x) = 0$, dus als $x = 1$. Verder is f positief voor $x > 1$ en f negatief voor $0 < x < 1$. Het teken wordt bepaald door de logarithme.

(b) Asymptoten kunnen alleen voor $x \to \infty$ of voor $x \downarrow 0$ ontstaan;

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0, \qquad \lim_{x\downarrow 0} \frac{\ln(x)}{x^2} = -\infty$$

Er is dus een verticale asymptoot bij $x = 0$ en een horizontale asymptoot $y = 0$.

(c) $f'(x) = \frac{1}{x}x^{-2} - 2x^{-3}\ln(x) = x^{-3}\big(1 - 2\ln(x)\big)$.

(d) Merk op dat de kritieke punten (i.e. waar $f'(x) = 0$) worden gegeven door $\ln(x) = \frac{1}{2}$ ofwel $x = \sqrt{e}$. Omdat f overal differentieerbaar is zijn er geen singuliere punten. Er zijn geen randpunten. Merk op dat $f'(x) > 0$ voor $x \in (0, \sqrt{e})$ en $f'(x) < 0$ voor $x \in (\sqrt{e}, \infty)$. Merk op dat $f''(x) = -3x^{-4}(1 - 2\ln(x)) - 2x^{-3}\frac{1}{x} = x^{-4}\big(-5 + 6\ln(x)\big)$ en $f''(\sqrt{e}) = e^{-2}\big(-5 + 3\big) < 0$, zodat f een maximum $f(\sqrt{e}) = \frac{\frac{1}{2}}{e} = \frac{1}{2e}$ heeft voor $x = \sqrt{e}$. Uit (b) weten we dat dit het globale maximum is, en er is geen globaal minimum (vanwege (b).)

(e) Uit (c) weten we dat $f''(x) < 0$ voor $x \in (0, e^{5/6})$ en daar is f concaaf naar beneden. Verder weten we dat $f''(x) < 0$ voor $x \in (e^{5/6}, \infty)$ en daar is f concaaf naar boven. De punten $x = e^{5/6}$ met $f(e^{5/6}) = \frac{5}{6}\frac{1}{e^{5/3}}$ is het (enige) buigpunt voor f.

Opgave 7. De Maclaurin formule voor e^x is bekend, of gemakkelijk afleidbaar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^4)$$

Vervang x door $-x^4$, dan krijgen we

$$e^{-x^4} = 1 - x^4 + \frac{x^8}{2} - \frac{x^{12}}{6} + \mathcal{O}(x^{16})$$

Vanwege uniciteit van Taylorpolynomen is dit het Taylorpolynoom van graad 16 voor e^{-x^4} rond $x = 0$.

Opgave 8. Antwoord 8b is correct. (I) convergent volgt uit Theorem 2, p.364, Sectie 6.5. (II) divergent volgt omdat de integrand gedraagt zich als $\frac{1}{x}$ en gebruik dan Theorem 2, p.364, en Theorem 3, p.366, Sectie 6.5.

Opgave 9.

(a) Stelling van Rolle zegt dat voor $g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ continu met g differentieerbaar op (a, b) en als bovendien $g(a) = g(b)$, dan bestaat er een $c \in (a, b)$ met $g'(c) = 0$. (Theorem 15 op p.141, Sectie 2.8.)

(b) Veronderstel dat f en g continu zijn op $[a, b]$ en differentieerbaar op (a, b) en dat $g'(x) \neq 0$ voor alle $x \in (a, b)$. Merk op dat $g(a) \neq g(b)$ (Immers, anders geeft de stelling van Rolle dat $g'(c) = 0$ voor een $c \in (a, b)$, in tegenspraak met de aanname dat g' niet nul is op(a, b).)

Bekijk de functie

$$h(x) = f(x)\big(g(b) - g(a)\big) - g(x)\big(f(b) - f(a)\big)$$

dan $h(a) = 0$, $h(b) = 0$. Bovendien is h continu op $[a, b]$ (omdat f en g dat zijn) en differentieerbaar op (a, b) (omdat f en g dat zijn). Volgens de stelling van Rolle is er een $c \in (a, b)$ met $h'(c) = 0$, dus

$$0 = h'(c) = f'(c)\big(g(b) - g(a)\big) - g'(c)\big(f(b) - f(a)\big) \quad \Longrightarrow \quad \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

(c) De gewone middelwaardestelling correspondeert met $g(x) = x$. Laat $x(t)$ de plaats zijn van Usain Bolt op de 100m, dus $x(0) = 0$, $x(9.63) = 100$, dan kunnen we aannemen dat x voldoet aan de voorwaarden van de middelwaardestelling (dus x continu op $[0, 9.63]$ en differentieerbaar (want dat is de snelheid van Usain Bolt) op $(0, 9.63)$.) Volgens de middelwaardestelling is er een $t_0 \in (0, 9.63)$ met

$$\frac{x(0) - x(9.63)}{0 - 9.63} = \frac{100}{9.63} = 10.384 = x'(t_0)$$

(d) Laat $y(t)$ de plaats zijn van Asafa Powell op de 100m, dus $y(0) = 0$, $y(11.99) = 100$, en dan kunnen we aannemen dat y continu is op $[0, 11.99]$ en differentieerbaar op $(0, 11.99)$. Merk op dat x en y inverteerbare functies, en laat t en s de inverse functies zijn. Dus $t(x)$, respectievelijk $s(y)$, is de tijd van Usain Bolt, respectievelijk Asafa Powell, op de 100m baan op plaats x, respectievelijk y. Dan kunnen we de gegeneraliseerde middelwaardestelling toepassen op $[0, 100]$ om te krijgen dat

$$\frac{1}{1.245} = \frac{t(100) - t(0)}{s(100) - s(0)} = \frac{t'(x_0)}{s'(x_0)} = \frac{\frac{dy}{dt}(s(x_0))}{\frac{dx}{dt}(t(x_0))} \quad \Longrightarrow \frac{dx}{dt}(t(x_0)) = 1.245 \cdot \frac{dy}{dt}(s(x_0))$$

voor een plaats $p \in (0, 100)$.