Radboud Universiteit Nijmegen

Tentamen Calculus 1 NWI-NP003B
4 november 2014, 12.30–15.30

Het gebruik van een rekenmachine/GR, telefoon, boek, aantekeningen e.d. is niet toegestaan. Geef precieze argumenten en antwoorden. Zorg dat uw redeneringen en schrijfstijl helder en beknopt zijn. Noteer op elk vel uw naam en studentnummer.
In geval uw huiswerkcijfer $H \geq 6.0$ scoort u minimaal $15H/10$ voor opgave 9.

---

1. (a) Gegeven $z = 2 - 2i$, $w = -1 - i\sqrt{3}$. Bereken $\dfrac{\overline{z}}{w}$.

   (b) Bepaal alle complexe getallen z die voldoen aan $z^3 - 8i = 0$.

2. Definieer de functie $f\colon (-1, \infty) \to \mathbb{R}$ door $f(x) = \exp\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$.

   (a) Bepaal de afgeleide van f.

   (b) Bepaal het bereik van f.

   (c) Laat zien dat f inverteerbaar is, en bepaal de inverse van f inclusief het domein van f^{-1}.

3. Zij $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een continue functie en definieer $h(x) = \displaystyle\int_{-x^2}^{e^x} f(t)\,dt$. Bepaal $h'(x)$.

4. Bepaal de volgende onbepaalde en bepaalde integraal:

$$\int e^{-2x}\cos(x)\,dx \qquad\qquad \int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} \frac{\big(\arcsin(x)\big)^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

5. Gegeven is dat de kromme $e^{xy} = x + y^3 + e^2 - 3$ rond het punt $(2, 1)$ lokaal de grafiek is van y als functie van x. Bepaal de raaklijn door $(2, 1)$.

6. Stel $f(x) = x^2 e^{-x}$ met domein $[-1, 4]$.

   (a) Bepaal de nulpunten van f, en geef aan waar f positief/negatief is.

   (b) Bepaal de afgeleide van f.

   (c) Bepaal de extreme waarden (maxima/minima en lokaal/globaal) van f.

   (d) Waar is f concaaf naar boven en concaaf naar beneden?

!!ZOZ Op de achterkant staan ook nog opgaven ZOZ!!

7. De Maclaurin formule $\tan(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \mathcal{O}(x^5)$ is gegeven. Bepaal

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x) - x + \cos(x) - 1 + \frac{1}{2}x^2}{\ln(1+x^3)}$$

8. [1] De juiste formulering van de tussenwaardestelling is:

   (a) Een functie $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ neemt elke waarde uit zijn bereik aan.

   (b) Een functie $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ neemt elke waarde tussen $f(a)$ en $f(b)$ aan.

   (c) Een continue functie $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ neemt elke waarde tussen $f(a)$ en $f(b)$ aan.

   (d) Elke continue functie $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ is differentieerbaar.

9. [2]

   (a) Veronderstel dat f twee-maal differentieerbaar is met f'' continu, en dat $f(x) \neq 0$ voor alle x. Laat $k \geq 1$ een geheel getal zijn. Laat zien dat

$$\int \frac{f''(x)f(x) - k\big(f'(x)\big)^2}{\big(f(x)\big)^{k+1}}\,dx \;=\; \frac{f'(x)}{\big(f(x)\big)^k}$$

   (*Hint.* Differentieer het rechterlid.)

   (b) Laat zien dat

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^{k+1}}\,dx = \frac{1}{2k}\frac{x}{(x^2+1)^k} + (1 - \frac{1}{2k})\int \frac{1}{(x^2+1)^k}\,dx$$

   (*Hint.* Kies een geschikte f in (a).)

   (c) Bepaal

$$\int \frac{2x+1}{(x^2+1)^3}\,dx$$

   (*Hint.* Bepaal een geschikte splitsing van de teller en gebruik (b) tweemaal.)

Normering											
Opgave	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Gratis	Totaal
Punten	10	12	6	12	6	16	8	5	15	10	100

Het eindcijfer T is de gebruikelijke afronding van het totaal aantal behaalde punten gedeeld door 10 naar hele en halve cijfers (met uitzondering van 5.5), waarin een eventueel huiswerkcijfer wordt meegenomen in de beoordeling van opgave 9.

[1] Bij deze vraag kunt u gokken. Een fout antwoord geeft aftrek, géén antwoord geeft geen aftrek. Alleen het antwoord van deze opgave telt.

[2] Voor deze opgave scoort u minimaal $H \cdot 15/10$ punten, mits uw gemiddelde huiswerkcijfer $H \geq 6.0$ is.

Uitwerkingen en hints

Opgave 1.

(a) Gegeven $z = 2 - 2i$, $w = -1 - i\sqrt{3}$,

$$\frac{\overline{z}}{w} = \frac{2+2i}{-1-i\sqrt{3}} = \frac{2+2i}{-1-i\sqrt{3}}\frac{-1+i\sqrt{3}}{-1+i\sqrt{3}} =$$
$$\frac{1}{4}\Big(-2-2\sqrt{3}+i(-2+2\sqrt{3})\Big) = \frac{-1}{2}(1+\sqrt{3}) + i\frac{1}{2}(-1+\sqrt{3})$$

Alternatief: in plaats van in Cartesische coördinaten, kan het ook in poolcoördinaten. Merk op $z = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{1}{4}\pi}$, $w = 2e^{-i\frac{2}{3}\pi}$, en dan

$$\frac{\overline{z}}{w} = \frac{2\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{1}{4}\pi + i\frac{2}{3}\pi} = \sqrt{2}e^{i\frac{11}{12}\pi}$$

(b) Bepaal alle complexe getallen z die voldoen aan $z^3 - 8i = 0$. Schrijf in poolcoördinaten $z = re^{i\phi}$, $r \geq 0$, $\phi \mod 2\pi$, dan

$$z^3 = 8i \quad\Longrightarrow\quad r^3e^{i3\phi} = 8e^{i\frac{1}{2}\pi} \quad\Longrightarrow$$
$$\begin{cases} r^3 = 8, \\ 3\phi = \frac{1}{2}\pi \mod 2\pi \end{cases} \quad\Longrightarrow \begin{cases} r = \sqrt[3]{8} = 2, \\ \phi = \frac{1}{6}\pi \mod \frac{2}{3}\pi \end{cases}$$

Dus we vinden drie oplossingen

$$\begin{aligned} z_0 &= 2e^{i\frac{1}{6}\pi} = 2\cos(\frac{1}{6}\pi) + 2i\sin(\frac{1}{6}\pi) = \sqrt{3} + i, \\ z_1 &= 2e^{i\frac{5}{6}\pi} = 2\cos(\frac{5}{6}\pi) + 2i\sin(\frac{5}{6}\pi) = -\sqrt{3} + i, \\ z_2 &= 2e^{i\frac{3}{2}\pi} = 2\cos(\frac{3}{2}\pi) + 2i\sin(\frac{3}{2}\pi) = -2i, \end{aligned}$$

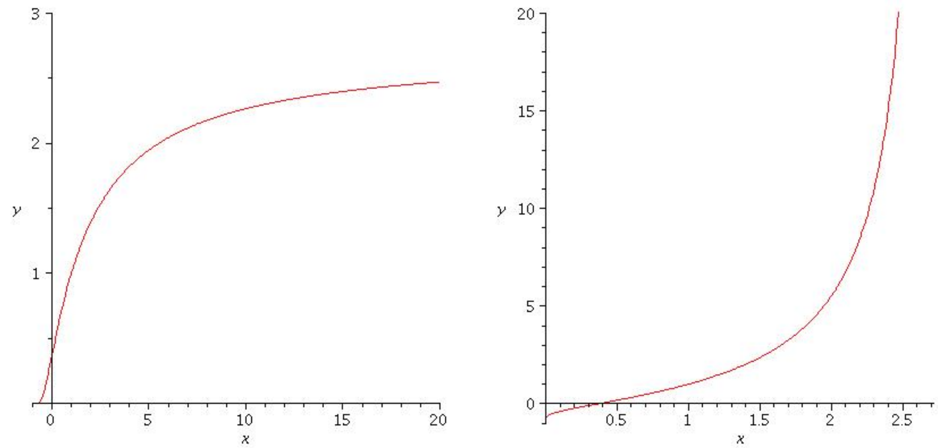
Merk op dat deze nulpunten op een cirkel met straal 2 liggen, en dan de hoekpunten van een gelijkzijdige driehoek vormen.

Alternatief: als je ziet dat $z = -2i$ voldoet, dan kun je staartdelen en $z^3 - 8i = (z + 2i)(z^2 - 2iz - 4)$ bepalen. De nulpunten van $z^2 - 2iz - 4 = 0$ kun je via kwadraat afsplitsen (ofwel de *abc*-formule) vinden;

$$0 = z^2 - 2iz - 4 = (z-i)^2 - i^2 - 4 = (z-i)^2 - 3 \quad\Longrightarrow\quad z = i \pm \sqrt{3}$$

Opgave 2.

Definieer de functie $f\colon (-1,\infty) \to \mathbb{R}$ door $f(x) = \exp\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$.



Figuur 1: De grafiek van de functie f (links) en de inverse functie f^{-1} (rechts) van opgave 2.

(a)

$$f'(x) = \exp\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\left(\frac{(x+1)\cdot 1-(x-1)\cdot 1}{(x+1)^2}\right) = \frac{2}{(x+1)^2}\exp\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

Merk op dat $f'(x) > 0$ op het domein $(-1,\infty)$, zodat f strikt monotoon stijgend is.

(b) Omdat f strikt monotoon stijgend is, bekijken we de limiet naar de grenzen van het domein van f;

$$\lim_{x\to\infty}\exp\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \exp(1) = e,$$

$$\lim_{x\downarrow -1}\exp\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 0, \quad \text{want } \lim_{x\downarrow -1}\frac{x-1}{x+1} = -\infty$$

Het bereik is $(0,e)$.

(c) Omdat f strikt monotoon stijgend is op $(-1,\infty)$, is f injectief (of 'one-to-one'), en dus is f inverteerbaar. Het domein van f^{-1} is het bereik van f, dus $(0,e)$. Het bereik van f^{-1} is het domein $(-1,\infty)$ van f.

Voor de expliciete vorm van de inverse,

$$f^{-1}(x) = y \iff f(y) = x \iff \exp\left(\frac{y-1}{y+1}\right) = x$$

$$\implies \frac{y-1}{y+1} = \ln(x) \implies y-1 = (y+1)\ln(x)$$

$$\implies y(1-\ln(x)) = 1+\ln(x) \implies f^{-1}(x) = y = \frac{1+\ln(x)}{1-\ln(x)}$$

Extra: merk op dat inderdaad geldt:

$$\lim_{x\downarrow 0} \frac{1+\ln(x)}{1-\ln(x)} = -1, \qquad \lim_{x\uparrow e} \frac{1+\ln(x)}{1-\ln(x)} = +\infty$$

Opgave 3. Bepaal $h'(x)$ door middel van de hoofdstelling van de integraalrekening en de kettingregel

$$h'(x) = f(e^x)e^x - f(-x^2)\cdot(-2x) = e^x f(e^x) + 2xf(-x^2)$$

Opgave 4. Met behulp van partiële integratie (twee keer):

$$\int \underbrace{e^{-2x}}_{f'} \underbrace{\cos(x)}_{g}\, dx = \underbrace{-\frac{1}{2}e^{-2x}}_{f} \underbrace{\cos(x)}_{g} - \int \underbrace{-\frac{1}{2}e^{-2x}}_{f} \cdot \underbrace{-\sin(x)}_{g'}\, dx =$$

$$-\frac{1}{2}e^{-2x}\cos(x) - \frac{1}{2}\int \underbrace{e^{-2x}}_{f'} \underbrace{\sin(x)}_{g}\, dx =$$

$$-\frac{1}{2}e^{-2x}\cos(x) - \frac{1}{2}\left(\underbrace{\frac{-1}{2}e^{-2x}}_{f} \underbrace{\sin(x)}_{g} - \int \underbrace{\frac{-1}{2}e^{-2x}}_{f} \underbrace{\cos(x)}_{g'}\, dx \right) =$$

$$-\frac{1}{2}e^{-2x}\cos(x) + \frac{1}{4}e^{-2x}\sin(x) - \frac{1}{4}\int e^{-2x}\cos(x)\, dx$$

Dus

$$\frac{5}{4}\int e^{-2x}\cos(x)\, dx = -\frac{1}{2}e^{-2x}\cos(x) + \frac{1}{4}e^{-2x}\sin(x) \quad \Longrightarrow$$

$$\int e^{-2x}\cos(x)\, dx = -\frac{2}{5}e^{-2x}\cos(x) + \frac{1}{5}e^{-2x}\sin(x)$$

Opmerking: je kunt ook in de eerste stap van het partieel integreren $\cos(x)$ als afgeleide zien, en dan op dezelfde manier nogmaals partieel integreren.

Alternatief: raad een primitieve van de vorm $Ae^{-2x}\cos(x) + Be^{-2x}\sin(x)$, en differentieer deze. Dat blijft een functie van deze vorm, en kies dan A en B zodanig dat de afgeleide gelijk is aan $e^{-2x}\cos(x)$. Dit geeft twee vergelijkingen met twee onbekenden, die oplosbaar is.

Voor de andere integraal passen we de substitutieregel toe; $u = \arcsin(x)$ en dus $du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$,

$$\int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} \frac{\big(\arcsin(x)\big)^3}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \int_{\arcsin(0)}^{\arcsin(\frac{1}{2}\sqrt{2})} u^3\, du = \int_0^{\frac{1}{4}\pi} u^3\, du = \frac{1}{4}u^4\Big|_0^{\frac{1}{4}\pi} = \left(\frac{1}{4}\right)^5 \pi^4$$

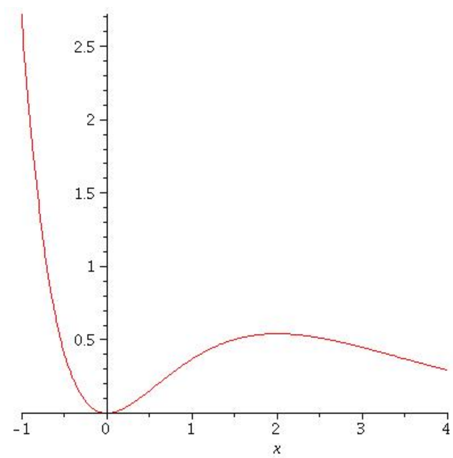
Opgave 5. Het is voldoende de afgeleide voor de raaklijn te vinden, want we weten al dat $(2, 1)$ op de lijn ligt. Impliciet differentiëren geeft

$$e^{xy}(y + xy') = 1 + 3y^2 y'$$

en $(x, y) = (2, 1)$ invullen geeft $e^2(1 + 2y') = 1 + 3y'$ ofwel $y'(2e^2 - 3) = 1 - e^2$, en dus is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn gelijk aan $\frac{1 - e^2}{2e^2 - 3}$. De raaklijn is dan

$$y - 1 = \frac{1 - e^2}{2e^2 - 3}(x - 2)$$

Opgave 6. Stel $f(x) = x^2 e^{-x}$ met domein $[-1, 4]$.



Figuur 2: De grafiek van de functie f van opgave 6.

(a) $f(x) = 0$ dan en slechts dan als $x = 0$, en verder is f positief als product van een niet-negatieve functie x^2 en een positieve functie e^{-x}.

(b) $f'(x) = 2xe^{-x} - x^2 e^{-x} = (2x - x^2)e^{-x}$.

(c) Merk op dat de kritieke punten (i.e. waar $f'(x) = 0$) worden gegeven door $x = 0$ of $x = 2$. Omdat f overal differentieerbaar is zijn er geen singuliere punten. Er zijn nog de randpunten $x = -1$ en $x = 4$ als mogelijke kandidaten. Merk op dat $f'(x) < 0$ voor $x \in [-1, 0)$ of $x \in (2, 4]$ en $f'(x) > 0$ voor $x \in (0, 2)$. Dus f heeft een randmaximum $f(-1) = e \approx 2.7$ voor $x = -1$ en een randminimum $f(4) = 16e^{-4} \approx 0.29$ voor $x = 4$. Merk op dat $f''(x) = (2 - 2x)e^{-x} - (2x - x^2)e^{-x} = (2 - 4x + x^2)e^{-x}$ en $2 - 4x + x^2 = (x-2)^2 - 4 + 2 = 0$ als $x = 2 \pm \sqrt{2}$. In het bijzonder $f''(0) > 0$, dus f heeft lokaal minimum $f(0) = 0$ voor $x = 0$. Ook $f''(2) = -2$, dus f heeft lokaal maximum $f(2) = 4e^{-2} \approx 0.54$ voor $x = 0$.

Dus we concluderen dat $f(0) = 0$ het globale minimum is, en dat het globale maximum $f(-1) = e$ is. In het bijzonder is het minimum $f(4) = 16e^{-4}$ lokaal, en evenzo is het maximum $f(2) = 4e^{-2}$ lokaal.

(d) Uit (b) weten we dat $f''(x) > 0$ voor $x \in [-1, 2-\sqrt{2})$ of $x \in (2+\sqrt{2}, 4]$, dus daar is de functie concaaf naar boven (of convex). Verder $f''(x) < 0$ voor $x \in (2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2})$, en daar is f concaaf naar beneden. De punten $2-\sqrt{2}$ en $2+\sqrt{2}$ zijn de buigpunten voor f.

Opgave 7. De Maclaurin formule voor $\tan(x)$ is gegeven. We weten (of leiden af)

$$\cos(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \mathcal{O}(x^4),$$
$$\ln(1+x) = x + \mathcal{O}(x^3)$$

Invullen geeft

$$\frac{\tan(x) - x + \cos(x) - 1 + \frac{1}{2}x^2}{\ln(1+x^3)} = \frac{x + \frac{1}{3}x^3 + \mathcal{O}(x^5) - x + 1 - \frac{1}{2}x^2 + \mathcal{O}(x^4) - 1 + \frac{1}{2}x^2}{x^3 + \mathcal{O}(x^9)}$$
$$= \frac{\frac{1}{3}x^3 + \mathcal{O}(x^4)}{x^3 + \mathcal{O}(x^9)} = \frac{\frac{1}{3} + \mathcal{O}(x)}{1 + \mathcal{O}(x^6)} \implies \lim_{x\to 0} \frac{\tan(x) - x + \cos(x) - 1 + \frac{1}{2}x^2}{\ln(1+x^3)} = \frac{1}{3}$$

Opgave 8. Antwoord 8c is correct, zie The Intermediate-Value Theorem (p.85. Sectie 1.4).

Opgave 9.

(a) Differentieer het rechterlid met behulp van de quotiëntregel:

$$\left(\frac{f'(x)}{\big(f(x)\big)^k}\right)' = \frac{f''(x)\big(f(x)\big)^k - f'(x)k\big(f(x)\big)^{k-1}f'(x)}{\big(f(x)\big)^{2k}} = \frac{f''(x)f(x) - k\big(f'(x)\big)^2}{\big(f(x)\big)^{k+1}}$$

En dus beide kanten integreren geeft

$$\int \frac{f''(x)f(x) - k\big(f'(x)\big)^2}{\big(f(x)\big)^{k+1}}\,dx = \int \left(\frac{f'(x)}{\big(f(x)\big)^k}\right)' dx = \frac{f'(x)}{\big(f(x)\big)^k}$$

(b) Neem $f(x) = x^2 + 1$, dan voldoet f aan de voorwaarden (twee-maal differentieerbaar en nergens 0). Invullen geeft

$$\int \frac{2(x^2+1) - k\big(2x\big)^2}{\big(x^2+1\big)^{k+1}}\,dx = \frac{2x}{\big(x^2+1\big)^k}$$

Vereenvoudig de integraal door

$$
\begin{gathered}
\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^k} = \int \frac{(2-4k)x^2+2}{\left(x^2+1\right)^{k+1}}\,dx = \\
(2-4k)\int \frac{x^2+1}{\left(x^2+1\right)^{k+1}}\,dx + 4k\int \frac{1}{\left(x^2+1\right)^{k+1}}\,dx = \\
(2-4k)\int \frac{1}{\left(x^2+1\right)^{k}}\,dx + 4k\int \frac{1}{\left(x^2+1\right)^{k+1}}\,dx
\end{gathered}
$$

Delen door $4k$ en de integraal naar de andere kant brengen geeft

$$
\int \frac{1}{(x^2+1)^{k+1}}\,dx = \frac{1}{2k}\frac{x}{(x^2+1)^k} + (1-\frac{1}{2k})\int \frac{1}{(x^2+1)^k}\,dx
$$

(c) We splitsen de integraal en gebruiken de substitutieregel (met $u = x^2+1$ en $du = 2x\,dx$) en de regel van (b) twee keer;

$$
\begin{gathered}
\int \frac{2x+1}{(x^2+1)^3}\,dx = \int \frac{2x}{(x^2+1)^3}\,dx + \int \frac{1}{(x^2+1)^3}\,dx = \\
\int \frac{1}{u^3}\,du + \frac{1}{4}\frac{x}{(x^2+1)^2} + (1-\frac{1}{4})\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx = \\
\frac{-1}{2}u^{-2} + \frac{1}{4}\frac{x}{(x^2+1)^2} + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1} + (1-\frac{1}{2})\int \frac{1}{x^2+1}\,dx\right) = \\
\frac{-1}{2}\frac{1}{(x^2+1)^2} + \frac{1}{4}\frac{x}{(x^2+1)^2} + \frac{3}{8}\frac{x}{x^2+1} + \frac{3}{8}\arctan(x) = \\
\frac{1}{4}\frac{x-2}{(x^2+1)^2} + \frac{3}{8}\frac{x}{x^2+1} + \frac{3}{8}\arctan(x)
\end{gathered}
$$