Radboud Universiteit Nijmegen

Tentamen Calculus 1 NWI-NP003B
5 november 2012, 8.30–11.30

Het gebruik van een rekenmachine, telefoon en boek(en) is niet toegestaan. Geef precieze argumenten en antwoorden. Maak uw redenering zo helder mogelijk.

---

1. Het polynoom $p(x) = x^6 + x^3 - 2$ wordt beschouwd als functie $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
   (a) Laat zien dat p een nulpunt heeft in het interval $(-2, 0)$ en in het interval $(0, 2)$.
   (b) Bepaal alle complexe nulpunten van p.

2. Bepaal de afgeleides van de volgende functies:
$$\arcsin(\sqrt{x}) \qquad\qquad \int_{-x^2}^{e^x} \cos^2(\sin t)\cos(t)\,dt$$

3. Bepaal de volgende integralen:
$$\int_0^1 xe^{-x^2}\,dx \qquad\qquad \int_0^2 \frac{x^3 + x + 1}{1 + x^2}\,dx$$

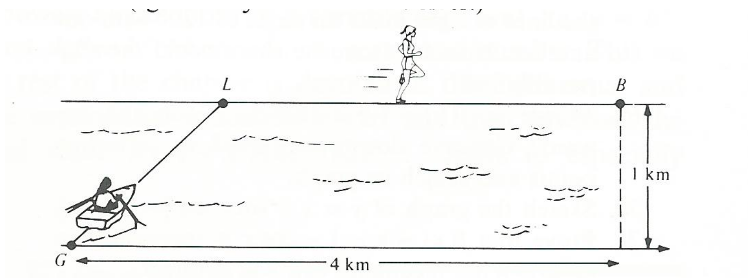
4. De kromme in $\mathbb{R}^2$ wordt gegeven in poolcoördinaten door middel van $r = 3 + \varphi\cos(\varphi)$. Het punt $(\frac{3}{2}\sqrt{2} + \frac{\pi}{8}, \frac{3}{2}\sqrt{2} + \frac{\pi}{8})$ in Cartesische coördinaten correspondeert met $\varphi = \frac{\pi}{4}$ in poolcoördinaten. Wat is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn (in Cartesische coördinaten) aan de kromme in dit punt?

5. Stel $f(x) = (x^2 - 1)e^{-x}$ met domein $\mathbb{R}$.
   (a) Bepaal de nulpunten van f, en geef aan waar f positief/negatief is.
   (b) Heeft f (scheve/horizontale/verticale) asymptoten?
   (c) Bepaal de afgeleide van f.
   (d) Bepaal de extreme waarden (maxima/minima en lokaal/globaal) van f.
   (e) Laat zien dat de afgeleide functie de waarde -1 aanneemt in het interval $(-1, 0)$.

6. Vereenvoudig $\tan(\arccos x)$.

7. De juiste formulering van de tussenwaardestelling is:[1]
   (a) De functie $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ neemt elke waarde uit zijn bereik aan.
   (b) Een continue functie $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ neemt elke waarde tussen $f(a)$ en $f(b)$ aan.
   (c) Een functie $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ neemt elke waarde tussen $f(a)$ en $f(b)$ aan.
   (d) Elke continue functie $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ is differentieerbaar.

[1] Bij deze vraag kunt u gokken. Een fout antwoord geeft aftrek, géén antwoord geeft geen aftrek.



Figuur 1: Plaatje voor opgave 8.

8. (Zie Figuur 1). Stella vertrekt van het punt G, en zij wil naar punt B, en wel zo snel mogelijk. Het kanaal is 1 km breed, en het corresponderende punt B aan de overkant is 4 km verderop. Het water is stilstaand. Ze roeit 4 km/u en ze loopt hard met een snelheid van 16 km/u. Wat is haar optimale route?

9. [2]

   (a) Veronderstel dat f and g continue functies zijn op $[a, b]$ en differentieerbaar op (a, b). Veronderstel bovendien dat $g(a) \neq g(b)$. Laat zien dat er een $c \in (a, b)$ bestaat met
   $$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

   (b) Laat zien dat als f en g differentieerbare functies zijn met $f(0) = g(0) = 0$ en $g(x) \neq 0$ voor $x \neq 0$, dan geldt
   $$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$
   aangenomen dat beide limieten bestaan.

   (c) Bereken
   $$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2 + x^4}$$

Normering

Opgave	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Gratis	Totaal
Punten	10	10	10	10	15	6	6	8	15	10	100

Het tentamencijfer T is de gebruikelijke afronding van het totaal aantal behaalde punten gedeeld door 10

[2]Voor deze opgave scoort u minimaal $H \cdot 15/10$ punten, mits uw gemiddelde huiswerkcijfer $H \geq 6.0$ is.

Summiere uitwerkingen en hints

Opgave 1.

(a) $p(-2) = (-2)^6 + (-2)^3 - 2 = 64 - 8 - 2 = 54 > 0$, $p(0) = -2 < 0$, $p(2) = 64 + 8 - 2 = 70 > 0$. p is een polynoom, dus continu. Pas de tussenwaardestelling toe op de functie p beperkt tot $[-2, 0]$ en $[0, 2]$. **NB** De expliciete nulpunten zijn 1 en $-\sqrt[3]{2}$.

(b) Merk op dat $0 = p(z) = (z^3 - 1)(z^3 + 2)$, dus de nulpunten zijn oplossingen van $z^3 = 1 = 1e^{i\pi 0}$ en $z^3 = -2 = 2e^{-i\pi}$. Dus de oplossingen zijn

$$e^{i0\pi} = 1, \qquad e^{2\pi i/3}, \qquad e^{4\pi i/3}$$

en

$$\sqrt[3]{2}e^{i\pi/3}, \qquad \sqrt[3]{2}e^{i3\pi/3} = -\sqrt[3]{2}, \qquad \sqrt[3]{2}e^{-i\pi/3}$$

De complexe nulpunten kunnen dan worden geschreven als

$$e^{2\pi i/3} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i, \qquad e^{4\pi i/3} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i$$

en

$$\sqrt[3]{2}e^{i\pi/3} = \sqrt[3]{2}(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i), \qquad \sqrt[3]{2}e^{-i\pi/3} = \sqrt[3]{2}(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i)$$

NB Omdat het een polynoom met reële coëfficiënten betreft, zijn de nulpunten complex geconjugeerd.

Opgave 2. Bepaal de afgeleides van de volgende functies:

$$\frac{d}{dx}\Big(\arcsin(\sqrt{x})\Big) = \frac{1}{\sqrt{1 - (\sqrt{x})^2}}\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}$$

Gebruik de hoofdstelling van de integraalrekening en de kettingregel;

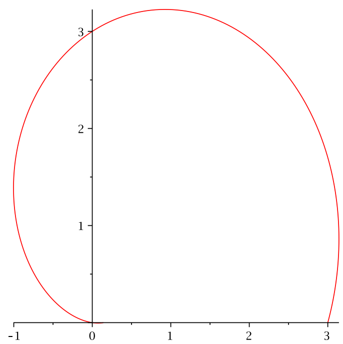
$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\int_{-x^2}^{e^x} \cos^2(\sin t)\cos(t)\,dt &= \cos^2(\sin e^x)\cos(e^x)e^x - \cos^2(\sin(-x^2))\cos(-x^2)(-2x) \\ &= \cos^2(\sin e^x)\cos(e^x)e^x + 2x\cos^2(\sin(x^2))\cos(x^2)\end{aligned}$$

Opgave 3. Gebruik de kettingregel (of substitutieregel)

$$\int_0^1 xe^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big|_0^1 = -\frac{1}{2e} + \frac{1}{2}$$

Splits de breuk

$$\int_0^2 \frac{x^3 + x + 1}{1 + x^2}\,dx = \int_0^2 x + \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}x^2 + \arctan(x)\Big|_0^2 = 2 + \arctan(2)$$



Figuur 2: Kromme bij opgave 4.

Opgave 4. De parametrisatie van de kromme is

$$\begin{cases} x(\varphi) = \big(3 + \varphi\cos(\varphi)\big)\cos\varphi \\ y(\varphi) = \big(3 + \varphi\cos(\varphi)\big)\sin\varphi \end{cases}$$

Het gevraagde punt hoort bij $\varphi = \frac{1}{4}\pi$, dus de richtingscoëfficiënt van de raaklijn is

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\varphi}(\phi)}{\frac{dx}{d\varphi}(\phi)}\Big|_{\varphi=\frac{1}{4}\pi} = \frac{\Big(\cos(\varphi) - \varphi\sin(\varphi)\Big)\sin(\varphi) + \big(3 + \varphi\cos(\varphi)\big)\cos(\varphi)}{\Big(\cos(\varphi) - \varphi\sin(\varphi)\Big)\cos(\varphi) - \big(3 + \varphi\cos(\varphi)\big)\sin(\varphi)}\Big|_{\varphi=\frac{1}{4}\pi}$$

$$= \frac{\Big(\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{4}\pi\frac{1}{2}\sqrt{2}\Big)\frac{1}{2}\sqrt{2} + \big(3 + \frac{1}{4}\pi\frac{1}{2}\sqrt{2}\big)\frac{1}{2}\sqrt{2}}{\Big(\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{4}\pi\frac{1}{2}\sqrt{2}\Big)\frac{1}{2}\sqrt{2} - \big(3 + \frac{1}{4}\pi\frac{1}{2}\sqrt{2}\big)\frac{1}{2}\sqrt{2}} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{2}}{\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{2} - \frac{\pi}{4}}$$

Opgave 5. Stel $f(x) = (x^2 - 1)e^{-x}$ met domein $\mathbb{R}$.

(a) $f(x) = 0$ dan en slechts dan als $x = -1$ of $x = 1$. Het teken wordt bepaald door $x^2 - 1$. Dus f negatief op $(-1, 1)$ en positief op $(-\infty, -1)$ en $(1, \infty)$.

(b)

$$\lim_{x\to\infty}(x^2 - 1)e^{-x} = 0, \qquad \lim_{x\to-\infty}(x^2 - 1)e^{-x} = \infty$$

Er zijn geen problemen met het domein. Er is dus geen verticale asymptoot, wel een horizontale $y = 0$ voor $x \to \infty$, en geen horizontale voor $x \to -\infty$. Dan kan er ook geen scheve asymptoot zijn, want voor geen enkele $a \in \mathbb{R}$ kan $\lim_{x\to-\infty}(x^2 - 1)e^{-x} - ax$ eindig zijn (expontiële functie groeit harder dan elk polynoom).

(c)

$$f'(x) = 2xe^{-x} - (x^2-1)e^{-x} = -e^{-x}(x^2-2x-1)$$

(d) $f'(x) = 0$ dan en slechts dan als $0 = x^2 - 2x - 1 = (x-1)^2 - 2$, dus als $x = 1 \pm \sqrt{2}$. Door f te beperken tot $[-1,1]$ weten we dat (omdat $f(-1) = 0 = f(1)$ en f negatief op $(-1,1)$ en f continu en differentieerbaar is) dat f een minimum aanneemt in $(-1,1)$, en dat is een kritiek punt van f, dus dat is $x = 1-\sqrt{2}$. Omdat f buiten $[-1,1]$ positief is, volgt dat het minimum $f(1-\sqrt{2}) = 2(1-\sqrt{2})e^{-1+\sqrt{2}} < 0$ in $1-\sqrt{2}$ ook globaal is

Door de tweede afgeleide $f''(1+\sqrt{2}) < 0$ te berekenen volgt dat f een lokaal maximum $f(1+\sqrt{2}) = 2(1+\sqrt{2})e^{-1-\sqrt{2}}$ in $1+\sqrt{2}$ heeft. Uit de limiet voor $x \to -\infty$ volgt dat het maximum lokaal is en niet globaal.

(e) Gebruik $f(-1) = 0$, $f(0) = -1$, en dat we de middelwaardestelling kunnen toepassen op f beperkt to $[-1,0]$, dan bestaat er een $c \in (-1,0)$ met

$$f'(c) = \frac{f(0) - f(-1)}{0-(-1)} = -1$$

(een schatting levert $c = -0.597\cdots$.)

Opgave 6. Maak een driehoek of

$$\tan(\arccos x) = \frac{\sin(\arccos x)}{\cos(\arccos x)} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

Opgave 7. Een continue functie $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ neemt elke waarde tussen $f(a)$ en $f(b)$ aan.

Opgave 8. Noem de afstand x die Stella heeft geroeid in de richting van het kanaal, dus dat ze dan nog $4-x$ km moet hardlopen van punt L naar punt B. Met Pythagoras volgt dat ze dan $\sqrt{1+x^2}$ km geroeid heeft. Hierover doet ze $\frac{1}{4}\sqrt{1+x^2}$ uur. Het hardlopen kost haar $\frac{1}{16}(4-x)$. We moeten dus

$$T(x) = \frac{1}{4}\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{16}(4-x)$$

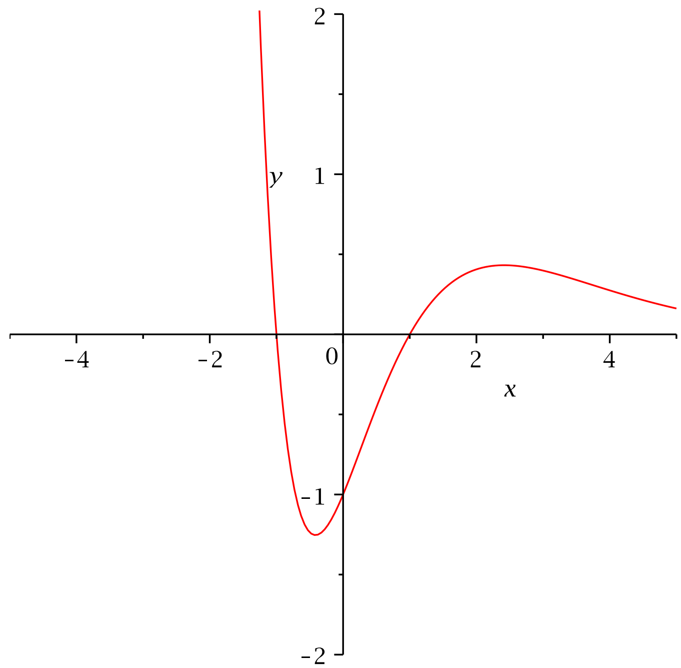
minimaliseren. Nu geldt

$$T'(x) = \frac{x}{4\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{16}$$

en dan $T'(x) = 0$ dan en slechts dan als

$$\frac{x}{4\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{16} \implies 4x = \sqrt{1+x^2} \implies 16x^2 = 1 + x^2$$

$$\implies 15x^2 = 1 \implies x = \pm\frac{1}{\sqrt{15}}$$



Figuur 3: Kromme bij opgave 5.

Aangezien negatieve x geen zin heeft, betekent dat Stella $x = 1/\sqrt{15}$ km in horizontale richting moet roeien.

NB Je kunt ook de hoek waaronder ze weg moet roeien naar de overkant optimaliseren; zeg α. Dan is $\sin(\alpha)\,|GL| = 1$, en de afstand die ze roeit is dan $1/\sin(\alpha)$. Dan resteert hardlopen over de afstand $|LB| = 4 - \cos(\alpha)\,|GL| = 4 - \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$. De tijd is dan afhankelijk van de hoek;

$$t(\alpha) = \frac{1}{4}\frac{1}{\sin(\alpha)} + \frac{1}{16}(4 - \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}).$$

Differentiëren geeft

$$\frac{dt}{d\alpha}(\alpha) = \frac{-\cos(\alpha)}{4\sin^2(\alpha)} - \frac{1}{16}\frac{-1}{\sin^2(\alpha)} = \frac{1 - 4\cos(\alpha)}{16\,\sin^2(\alpha)}$$

Dus $\frac{dt}{d\alpha}(\alpha) = 0$ geeft $\alpha = \arccos(\frac{1}{4})$.

Merk op dat in vergelijking met de andere oplossing de x correspondeert met $\cos(\arccos(\frac{1}{4}))\,|GL| = \frac{1}{4}1/\sin(\arccos(\frac{1}{4})) = \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{1-(1/4)^2}} = 1/\sqrt{15}$.

Opgave 9.

(a) Stel

$$h(x) = (f(x) - f(a))(g(b) - g(a)) - (g(x) - g(a))(f(b) - f(a))$$

dan is $h(a) = 0$ en $h(b) = 0$. Bovendien is h differentieerbaar op (a, b) en continu op $[a, b]$. Met de middelwaardestelling volgt dat er een $c \in (a, b)$ bestaat met

$$\begin{aligned} h'(c) = \frac{h(b) - h(a)}{b - a} = 0 \quad &\implies \quad f'(c)(g(b) - g(a)) - g'(c)(f(b) - f(a)) = 0 \\ &\implies \quad \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \end{aligned}$$

omdat $g(b) - g(a) \neq 0$.

(b) Schrijf

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(0)}{g(x) - g(0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

vanwege deel (a). Omdat c tussen 0 en x ligt volgt, als $x \to 0$, dan ook $c \to 0$. Dus

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(c) Gebruik (b) (en eigenlijk zonder dat we weten dat de limiet bestaat) en

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2 + x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin(x)}{2x + 4x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin(x)}{x} \frac{1}{2 + 4x^2} = -1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{-1}{2}$$