
Het gebruik van een zelfgemaakte samenvatting van twee bladzijden is toegestaan.
Geef volledige argumenten en antwoorden. Maak uw redenering zo helder mogelijk.

1. Zij $(\alpha, \beta) \ni t \mapsto \mathbf{r}(t) \in \mathbb{R}^3$ een gladde overal positief gekromde ruimtekromme.
- (a) Geef de definities van de kromming κ en de torsie τ van zo'n kromme, en laat zien dat ze onafhankelijk van de parametrisatie van de kromme zijn.
 - (b) Formuleer en bewijs de formules van Frenet.
 - (c) De helix is een ruimtekromme gegeven door de parametervoorstelling

$$\mathbf{r}(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$$

met $t \in \mathbb{R}$. Hierbij zijn $a > 0$ en $b \in \mathbb{R}$ zekere constanten. Bereken de kromming en de torsie van deze helix.

- (d) Bepaal de algemene vorm van een gladde ruimtekromme met constante positieve kromming κ en constante torsie τ . Motiveer uw antwoord.
2. Bewijs de stelling van Archimedes dat de horizontale projectie van de cylinder met vergelijking $x^2 + y^2 = 1, -1 < z < 1$, naar de ingeschreven bol $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ oppervlakte bewarend is.
3. Beschouw een glad omwentelingsoppervlak \mathcal{S} in coördinaten gegeven door

$$(u, v) \mapsto \mathbf{r}(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u))$$

voor zekere gladde functies $f > 0$ and g met $(f')^2 + (g')^2 > 0$.

- (a) Bereken de eerste fundamentealvorm van dit omwentelingsoppervlak.
- (b) Bereken ook de tweede fundamentealvorm.
- (c) Wanneer heet een kromme op \mathcal{S} een geodeet? Waarom zijn meridianen steeds geodeet? Wanneer is een breedtecirkel geodeet?
- (d) Bereken de Gauss kromming K van \mathcal{S} .
- (e) Ga na $K = -f''/f$ indien de profielkromme naar booglengte is geparаметriseerd.
- (f) De Beltrami trompet is het omwentelingsoppervlak met

$$f(u) = e^u, g(u) = \int \sqrt{1 - e^{2u}} du$$

voor $-\infty < u < 0$ en $v \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Ga na dat $K \equiv -1$ overal op de Beltrami trompet.

- (g) Bereken de totale oppervlakte van de Beltrami trompet.