Tentamen BPW, 30/6/14, HG00.068

Iedere opgave telt voor 10 punten. Ieder van de onderdelen uit opgave 3 is 2 punten waard. Een juist antwoord voor een onderdeel ervan, maar geen (juist) bewijs, levert 1 punt op.

Opgave 1. Bepaal alle oplossingen in $\mathbb{C}$ van de vergelijking

$$x^4 + 4x^2 + 4x + 7 = 0$$

Opgave 2. Zij a_1, a_2, a_3 complexe getallen zodat geldt

$$a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3 = 1$$

$$a_1^2a_2a_3 + a_1a_2^2a_3 + a_1a_2a_3^2 = -3$$

$$a_1^2a_2 + a_1^2a_3 + a_1a_2^2 + a_1a_3^2 + a_2^2a_3 + a_2a_3^2 + 3a_1a_2a_3 = -1$$

Bepaal $\{a_1, a_2, a_3\}$.

Opgave 3. Ga van de volgende beweringen na of ze waar zijn of niet. Indien een bewering waar is, geef een bewijs. Indien een bewering niet waar is, geef een tegenvoorbeeld.

1) Als $z \in \mathbb{C}$ trancendent is, dan e^z ook.

2) De groep der 2×2-matrices van de vorm $\{\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} | c \in \mathbb{R}\}$, met als bewerking matrixvermenigvulding, is isomorf met de optelgroep $\mathbb{R}$.

3) Zij R een commutatieve ring en $f(X) \in R[X]$ een veelterm met graad $d \geq 1$. Dan heeft $f(X)$ ten hoogste d nulpunten in R.

4) Zij a en b algebraïsche getallen. Als $z \in \mathbb{C}$ voldoet aan $z^2 + az + b = 0$, dan is z algebraïsch.

5) Zij $f(X) = X^4 + 4X^2 + 3$. Zij $a_1, \cdots, a_4$ de nulpunten van $f(X)$ in $\mathbb{C}$. Dan $\mathbb{Q}(a_1, \cdots, a_4) = \mathbb{Q}(i, \sqrt{3})$.

Opgave 4. Zij $F : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$. Laat zien dat

i) (3 pnt) $F(x, y) = (x + xy + y^3, y + 3x^4)$ niet inverteeerbaar is.

ii) (7 pnt) $F(x, y) = (x+y^2+4x^3y+4x^6, 3x+y+3y^2+2x^3+12x^3y+12x^6)$ wel inverteerbaar is, door F te schrijven als samenstelling van drie elementaire veeltermafbeeldingen.