Tentamen Beroemde Problemen in de Wiskunde 1 juli 2013, 12:30-15:30, LIN 4

Iedere opgave telt voor 10 punten. Ieder van de onderdelen uit opgave 3 is 2 punten waard. Een juist antwoord voor een onderdeel ervan, maar geen (juist) bewijs, levert 1 punt op.

Opgave 1. Bepaal alle oplossingen in $\mathbb{C}$ van de vergelijking

$$x^4 + 3x^2 + 2x + 3 = 0$$

Opgave 2. Zij a_1, a_2, a_3 complexe getallen zodat geldt

$$a_1 + a_2 + a_3 = 3,\ a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 13,\ a_1a_2a_3 = -4$$

Bepaal $\{a_1, a_2, a_3\}$.

Opgave 3. Ga van de volgende beweringen na of ze waar zijn of niet. Indien een bewering waar is, geef een bewijs. Indien een bewering niet waar is laat zien waarom dat zo is.

1) Het product van twee trancendente getallen is een trancendent getal.
2) Zij $G = \{a\}$ met daarop de bewerking $a * a = a$. Dan is G een groep.
3) Als a en b trancendent zijn, dan zijn $a + b$ of ab trancendent.
4) Zij G een groep met 12 elementen. Dan bestaat er een ondergroep met 8 elementen.
5) Zij $k \subseteq L$ een lichaamsuitbreiding, $a \in L$ en $f(X) \in k[X] - \{0\}$ zodat $f(a) = 0$. Als ϕ een k-automorfisme van L is dan geldt dat $f(\phi(a)) = 0$.

Opgave 4. Neem aan dat de volgende sterkere versie van het abc-vermoeden waar is: voor ieder drietal positieve gehele getallen a, b, c zonder gemene deler dat voldoet aan $a + b = c$ geldt $c < r(abc)^{1,7}$.
Zij m en n gehele getallen > 2. Leidt af dat de vergelijking $x^m - y^n = 1$ geen oplossing heeft bestaande uit positieve gehele getallen x en y.