Tentamen Analyse 2

27 januari 2014

Dit tentamen bestaat uit vijf opgaven. Motiveer uw antwoorden, en geef aan welke stellingen u gebruikt. Zet op elk blad uw naam en studentnummer, en lever geen kladblaadjes in.

Opgave 1. Zij d de Euclidische metriek op $\mathbb{R}$. Beschouw de metrische ruimte $(\mathbb{Z}, d)$, dat wil zeggen, $\mathbb{Z}$ met de door $\mathbb{R}$ geïnduceerde Euclidische metriek.

(a) Bewijs dat elke verzameling $X \subseteq \mathbb{Z}$ open is in $(\mathbb{Z}, d)$.

(b) Zij d_{disc} de discrete metriek op $\mathbb{Z}$. Wat zijn de open verzamelingen in $(\mathbb{Z}, d_{\text{disc}})$?

(c) Stel dat d_0 en d_1 metrieken zijn op een verzameling Y. Stel dat (Y, d_0) dezelfde open verzamelingen heeft als (Y, d_1). Volgt hieruit dat $d_0 = d_1$? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.

Opgave 2. Stel dat Y een metrische ruimte is, en dat $f, g : [0,1] \to Y$ continue functies zijn. Stel verder dat voor elke $x \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$ geldt dat $f(x) = g(x)$. Bewijs dat $f = g$.

Opgave 3. Zij $[a, b]$ een interval in $\mathbb{R}$, en zij $B = B([a, b] \to \mathbb{R})$ de ruimte van begrensde functies op $[a, b]$.

(a) Geef de definitie van de sup-norm-metriek d_∞ op B.

(b) Stel dat $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, een Cauchyrij is in (B, d_∞), en stel dat elke f_n continu is. Bewijs dat er een continue $f \in B$ bestaat zodat de f_n uniform naar f convergeren.

(c) Stel $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ is gedefiniëerd door $f_n(x) = x^n$ voor $n \in \mathbb{N}$. Laat zien dat de rij $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ geen Cauchyrij is in (B, d_∞).

Opgave 4. Beschouw de functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gedefiniëerd door

$$f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y).$$

(a) Laat zien dat f differentiëerbaar is en bereken $f'(x, y)$.

(b) Bewijs dat voor elke (x, y) geldt dat f inverteerbaar is op een open omgeving van (x, y).

Opgave 5. (a) Citeer de monotone convergentiestelling van Lebesgue.

(b) Zij $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ een vaste meetbare verzameling, en stel dat $f_n : \Omega \to [0, \infty]$ meetbaar is voor elke $n \in \mathbb{N}$. Bewijs het Lemma van Fatou:

$$\int_\Omega \liminf_{n\to\infty} f_n \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n$$

met behulp van de monotone convergentiestelling.

Beknopte antwoorden

N.B. Andere antwoorden kunnen mogelijk zijn.

Opgave 1. (a) Elke singleton $\{n\}$ met $n \in \mathbb{Z}$ is open, want gelijk aan $(n-\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}) \cap \mathbb{Z}$. Elke $X \subseteq \mathbb{Z}$ is dus een vereniging van open verzamelingen, en dus open.

(b) Er geldt dat elke singleton open is, omdat voor elke $n \in \mathbb{Z}$ geldt $\{n\} = B(n, \frac{1}{2})$. Dus er volgt weer dat elke $X \subseteq \mathbb{Z}$ open is.

(c) De metrieken d en d_{disc} zijn verschillende metrieken op $\mathbb{Z}$, en wegens (a) en (b) hebben ze dezelfde open verzamelingen.

Opgave 2. Stel $x \in [0,1]$. Laat x_n een rij in $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ zijn zodat $x_n \to x$. Dan geldt

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(x).$$

De eerste en laatste gelijkheid gelden wegens de continuïteit van f en g.

Opgave 3. (a) $d_\infty(f,g) = \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|$.

(b) Omdat $\mathbb{R}$ volledig is, is $C([0,1] \to \mathbb{R})$ een volledige deelruimte van B, zie Theorem 14.4.5. Omdat f_n een Cauchyrij is in $C([0,1] \to \mathbb{R})$ heeft de rij wegens de volledigheid ook een limiet $f \in C([0,1] \to \mathbb{R})$. In het bijzonder is f continu. Nu geldt (zie Proposition 14.4.4) dat convergentie in B hetzelfde is als uniforme convergentie van functies, dus $f_n \to f$ uniform.

(c) De rij continue functies f_n convergeert puntsgewijs naar een discontinue functie f. Als de rij f_n een Cauchyrij zou zijn in B had deze wegens (b) een continue limiet, en dat is dus niet het geval.

Opgave 4. (a) Alle partiële afgeleiden van f bestaan en zijn continu. Er volgt (Theorem 17.3.8) dat f' gelijk is aan de matrix van partiële afgeleiden:

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix}$$

(b) De matrix $f'(x,y)$ heeft als determinant $e^{2x}(\cos^2 y + \sin^2 y) = e^{2x} \neq 0$, en is dus inverteerbaar voor alle x en y. Wegens de inverse-functie-stelling is f dus inverteerbaar op een omgeving van (x,y).

Opgave 5. (a) Als $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ een rij niet-negatieve meetbare functies is met $0 \leqslant f_1 \leqslant f_2 \leqslant f_3 \ldots$ dan geldt $\int \sup_n f_n = \sup_n \int f_n$.

(b) Per definitie geldt $\liminf_n f_n = \sup_n \inf_{m \geqslant n} f_m$. Wegens de monotone-convergentiestelling geldt dus

$$\int \liminf_n f_n = \sup_n \int \inf_{m \geqslant n} f_m.$$

Wegens monotonie van de Lebesgue-integraal (Proposition 19.2.6 c) geldt

$$\int \inf_{m \geqslant n} f_m \leqslant \int f_m$$

voor alle $m \geqslant n$, dus

$$\int \inf_{m \geqslant n} f_m \leqslant \inf_{m \geqslant n} \int f_m$$

en dus

$$\sup_n \int \inf_{m \geqslant n} f_m \leqslant \sup_n \inf_{m \geqslant n} \int f_m = \liminf_n \int f_n.$$