Hertentamen Analyse 2

3 maart 2014

Dit tentamen bestaat uit vijf opgaven. Motiveer uw antwoorden, en geef aan welke stellingen u gebruikt. Zet op elk blad uw naam en studentnummer, en lever geen kladblaadjes in.

Opgave 1. Laat d_{l^2} de Euclidische metriek en d_{l^∞} de sup-norm-metriek op $\mathbb{R}^2$ zijn.

(a) Bewijs dat voor rijen in $\mathbb{R}^2$ convergentie in de l^2-metriek equivalent is met convergentie in de l^∞-metriek.

(b) Stel dat $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ functies zijn. De functie $f \oplus g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ is gedefinieerd door $f \oplus g(x) = (f(x), g(x))$. Bewijs dat f en g continu zijn dan en slechts dan als $f \oplus g$ continu is (beide met betrekking tot de Euclidische metriek).

Opgave 2. Stel dat $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ continu is voor elke $n \in \mathbb{N}$, en stel dat de rij $(f_n)_{n=1}^\infty$ uniform convergeert naar een functie f.

(a) Bewijs dat de rij f_n uniform begrensd is op $[0,1]$, dat wil zeggen,

$$\exists M \forall x \in [0,1] \forall n \big(|f_n(x)| \leqslant M\big).$$

(b) Laat $F_n(t) = \int_0^t f_n(x)dx$, met $t \in [0,1]$. Bewijs dat

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{t\to 1} F_n(t) = \lim_{t\to 1} \lim_{n\to\infty} F_n(t).$$

(z.o.z.)

Opgave 3. Beschouw de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeven door

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{als } x > 0 \\ -x^2 & \text{als } x \leqslant 0 \end{cases}$$

(a) Voor welke $k \geqslant 1$ is f een C^k-functie?

(b) Is f reëel analytisch?

Opgave 4. Zij $\|x\|$ de lengte van de vector x in $\mathbb{R}^n$, met de Euclidische metriek, en definieer de functie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ door $f(x) = \|x\|$.

In welke punten $x \in \mathbb{R}^n$ is f differentieerbaar? Bepaal voor deze x de afgeleide $f'(x)$.

Opgave 5. (a) Zij $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$. Stel dat $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^*$ meetbaar is. Bewijs dat voor alle $a \in \mathbb{R}^*$ geldt dat $\big\{x : f(x) = a\big\}$ meetbaar is in $\mathbb{R}^n$. (Behandel de gevallen $a = \pm\infty$ apart.)

(b) Stel dat $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ meetbaar zijn. Bewijs dat $E = \big\{x : g(x) \geqslant f(x)\big\}$ meetbaar is in $\mathbb{R}^n$.

Beknopte antwoorden

Opgave 1. (a) Voor alle $x, y \in \mathbb{R}^2$ geldt

$$d_{l^\infty}(x,y) \leqslant d_{l^2}(x,y) \leqslant \sqrt{2}\, d_{l^\infty}(x,y).$$

Er volgt dat voor een rij punten $x_n \in \mathbb{R}^2$ en een punt $x \in \mathbb{R}^2$ geldt dat $\lim_n d_{l^2}(x_n, x) = 0$ desda $\lim_n d_{l^\infty}(x_n, x) = 0$.

(b) Stel dat $x_n \to x$ in $\mathbb{R}$. Als f en g continu zijn dan $f(x_n) \to f(x)$ en $g(x_n) \to g(x)$. Maar dan ook $(f(x_n), g(x_n)) \to (f(x), g(x))$ (in l^2-metriek) wegens (a): $d_{l^2}((f(x_n), g(x_n)), (f(x), g(x))) \leqslant \sqrt{2}\sup(|f(x_n) - f(x)|, |g(x_n) - g(x)|) \to 0$ als $n \to \infty$.

Omgekeerd, als $f \oplus g$ continu is dan $(f(x_n), g(x_n)) \to (f(x), g(x))$, en weer wegens (a) geldt dan $f(x_n) \to f(x)$ en $g(x_n) \to g(x)$.

Opgave 2. (a) Elke f_n is continu, dus begrensd op $[0,1]$ (zie Proposition 13.3.2), zeg $|f_n(x)| \leqslant c_n$ voor alle x. Omdat $f_n \to f$ uniform is ook f continu, en dus ook begrensd, zeg $|f(x)| \leqslant c$ voor alle x. Wegens uniforme convergentie geldt $\exists N \forall n \geqslant N \forall x \big(|f_n(x) - f(x)| < 1\big)$, dus $|f_n(x)| \leqslant c + 1$ voor alle $n \geqslant N$ en alle x. Maar dan geldt voor alle n en x dat $|f_n(x)| \leqslant M$, met $M = \big\{c_1, \ldots, c_{n-1}, c + 1\big\}$.

(b) Merk op dat $F_n'(t) = f_n(t)$ voor elke n. Er geldt dus dat de rij afgeleiden F_n' uniform convergeert, en wegens Theorem 14.7.1 geldt dan dat ook de rij F_n uniform convergeert. Wegens Propositie 14.3.3 geldt nu

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{t\to 1} F_n(t) = \lim_{t\to 1} \lim_{n\to\infty} F_n(t).$$

Opgave 3. (a) Er geldt dat f differentieerbaar is voor elke x, met

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{als } x > 0 \\ -2x & \text{als } x \leqslant 0 \end{cases}$$

Dus $f'(x) = 2|x|$ is continu, dus $f \in C^1$. Echter f' is niet differentieerbaar voor $x = 0$, dus $f \notin C^2$, en dus ook niet in C^k voor $k \geqslant 2$.

(b) Reëel analytische functies zijn C^∞, dus wegens (a) is f niet reëel analytisch.

Opgave 4. f is differentieerbaar in elke $x \neq 0$.

Er geldt

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{1}{2}(x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x_i = \frac{x_i}{\|x\|}.$$

Voor elke i is dit een continue functie als $x \neq 0$, dus voor deze x geldt $f'(x) = (\frac{x_1}{\|x\|}, \ldots, \frac{x_n}{\|x\|})$. Voor $x = 0$ is de functie niet differentieerbaar. Bijvoorbeeld voor $n = 1$ geldt $f(x) = |x|$.

Opgave 5. (a) Per definitie is f meetbaar als alle verzamelingen $f^{-1}((c, \infty])$ meetbaar zijn (Def. 18.5.9). We hebben $f^{-1}(\infty) = \bigcap_{c \in \mathbb{N}} f^{-1}((c, \infty])$. Dit is een aftelbare doorsnede van meetbare verzamelingen, en is dus meetbaar (Lemma 18.4.9). Evenzo,

$$\begin{aligned} f^{-1}(-\infty) &= \bigcap_{c \in \mathbb{Z}} f^{-1}([-\infty, c]) \\ &= \bigcap_{c \in \mathbb{Z}} \mathbb{R}^n \setminus f^{-1}((c, \infty]) \end{aligned}$$

is meetbaar, want de meetbare verzamelingen zijn gesloten onder complement en aftelbare doorsnedes. Tenslotte geldt voor alle $a \in \mathbb{R}$ dat

$$f^{-1}(a) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}(B(a, \tfrac{1}{n})),$$

en $f^{-1}(B(a, \frac{1}{n}))$ is meetbaar want $B(a, \frac{1}{n})$ is open.

(b) Als f en g meetbaar zijn dan is ook $g - f$ meetbaar (Cor. 18.5.7), als samenstelling van de meetbare functie $h(x) = (f(x), g(x))$ en de continue functie $(x, y) \mapsto y - x$. Nu is

$$\begin{aligned} E &= \big\{x : (g - f)(x) \geqslant 0\big\} \\ &= \mathbb{R}^n \setminus \big\{x : (g - f)(x) < 0\big\} \\ &= \mathbb{R}^n \setminus (g - f)^{-1}\big((-\infty, 0)\big). \end{aligned}$$

Nu is $(-\infty, 0)$ open, dus $(g - f)^{-1}\big((-\infty, 0)\big)$ is meetbaar, dus is E meetbaar.