Tentamen Analyse 2

25 januari 2013, 8:30–11:30.

Dit tentamen bestaat uit vijf opgaven. Motiveer uw antwoorden, en geef aan welke stellingen u gebruikt. Zet op elk blad uw naam en studentnummer, en lever geen kladblaadjes in.

Opgave 1. Laat $X = [0,1] \cup \big((2,3] \cap \mathbb{Q}\big)$, en geef X de door $\mathbb{R}$ geïnduceerde Euclidische metriek.

(a) Is $[0,1]$ open in X ?

(b) Is X een samenhangende ruimte?

(c) Wat is de verzameling randpunten ∂X van X in X ?

(d) Wat is de verzameling randpunten ∂X van X in $\mathbb{R}$?

Opgave 2. Laat $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ de ruimte van alle lineaire afbeeldingen van $\mathbb{R}^n$ naar $\mathbb{R}^m$ zijn. Definiëer voor elke $f \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$,

$$\|f\| = \sup\big\{\|f(x)\|_m : \|x\|_n = 1\big\}.$$

Hier is $\|x\|_n$ de lengte van de vector x in $\mathbb{R}^n$ voor elke n. Definiëer verder $d(f,g) = \|f - g\|$ voor alle f en g in $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

(a) Bewijs dat $d(f,g) < \infty$ voor alle f en g in $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

(b) Bewijs dat d een metriek is op $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

(c) Laat $e_1, \ldots, e_n$ de standaardbasis zijn in $\mathbb{R}^n$. Stel dat $(f_j)_{j=1}^{\infty}$ een Cauchyrij is in $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Bewijs dat $(f_j(e_i))_{j=1}^{\infty}$ een Cauchyrij is in $\mathbb{R}^m$ voor elke $1 \leqslant i \leqslant n$.

(d) Bewijs dat $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ met de metriek d een volledige ruimte is.

Opgave 3. Zij $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ voor $x \neq 0$, en $f(0) = 0$. Bewijs of weerleg de bewering dat f reëel analytisch is rond $x = 0$.

Opgave 4. Laat f en g functies van $\mathbb{R}^n$ naar $\mathbb{R}$ zijn met gradiënten $\nabla f(x)$ en $\nabla g(x)$ in het punt $x \in \mathbb{R}^n$. Stel dat $h(x) = f(x) \cdot g(x)$.

(a) Bewijs dat h ook een gradiënt heeft in x, en dat

$$\nabla h(x) = f(x) \nabla g(x) + g(x) \nabla f(x).$$

N.B. Het geval $n = 1$ is een bekend regeltje voor differentiëren. Dit hoeft u niet opnieuw te bewijzen.

(b) Stel nu verder dat f en g C^1-functies zijn. Bewijs dat voor elke $x \in \mathbb{R}^n$ geldt dat $h'(x) = f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x)$.

Opgave 5. (a) Geef een voorbeeld van een rij Lebesgue-integreerbare, simpele functies $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zodat $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ puntsgewijs convergent is en zodat

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \neq \int_{\mathbb{R}} \sum_{n=0}^{\infty} f_n.$$

(b) Leg uit waarom het niet mogelijk is om in het voorbeeld bij (a) alle f_n niet-negatief te hebben.

Beknopte antwoorden

N.B. Andere antwoorden kunnen mogelijk zijn.

Opgave 1. (a) Ja; Voor elke $x \in [0,1]$ geldt dat de open omgeving $B(x, \frac{1}{2}) \cap X$ geheel binnen $[0,1]$ ligt.

(b) Nee; X is de disjuncte vereniging van $[0,1]$ en $(2,3] \cap \mathbb{Q}$, en deze zijn open in X.

(c) Er geldt voor *elke* ruimte X dat $\partial X = \emptyset$, want elk punt van X is een inwendig punt in X.

(d) In $\mathbb{R}$ geldt $\partial X = \{0,1\} \cup [2,3]$. Immers, geen enkel punt van $[2,3]$ is een inwendig punt van hetzij X of $\mathbb{R} \setminus X$.

Opgave 2. (a) Het is voldoende om te bewijzen dat $\|f\| < \infty$ voor elke $f \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Dit volgt omdat f lineair is, en dus continu, en de verzameling $\{x : \|x\|_n = 1\}$ is compact, dus het beeld hiervan onder f is weer compact (Theorem 13.3.1), en dus begrensd (Corollary 12.5.6).

(b) $d(f,g) \geqslant 0$ is evident, dus met (a) volgt dat $d(f,g) \in [0, \infty)$.

Duidelijk $d(f,f) = 0$. Omgekeerd, als $\|f\| = 0$ dan $f(e_i) = 0$ voor elke i, dus f is de nulfunctie.

d is duidelijk symmetrisch, want $\|f| \ = \|-f\|$.

Er geldt (voor het gemak schrijven we $\|x\|$ in plaats van $\|x\|_n$):

$$\begin{aligned}
d(f,g) + d(g,h) &= \sup_{\|x\|=1} \|(f-g)(x)\| + \sup_{\|x\|=1} \|(g-h)(x)\| \\
&\geqslant \sup_{\|x\|=1} \|(f-g)(x)\| + \|(g-h)(x)\| \\
&= \sup_{\|x\|=1} \|(f(x) - g(x)\| + \|(g(x) - h(x)\| \\
&\geqslant \sup_{\|x\|=1} \|(f(x) - h(x)\| \\
&= d(f,h).
\end{aligned}$$

(c) Dit volgt uit de observatie dat als $\|f - g\| < \varepsilon$ dat dan $\|f(e_i) - g(e_i)\| < \varepsilon$ voor alle i.

(d) Stel dat $(f_j)_{j=1}^{\infty}$ een Cauchyrij is in $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Wegens (c) is $(f_j(e_i))_{j=1}^{\infty}$ een Cauchyrij in $\mathbb{R}^m$, dus heeft hij een limiet $f(e_i)$ voor elke i. Dus de limiet

$f(v) := \lim_{j\to\infty} f_j(v) = \lim_{j\to\infty} \sum_{i=1}^n v_i f_j(e_i)$ bestaat voor alle $v \in \mathbb{R}^n$, en f is lineair als puntsgewijze limiet van lineaire functies.

Opgave 3. f is niet reëel analytisch rond $x = 0$, want f is niet identiek 0 op een omgeving van $x = 0$, en de Taylorreeks van f is dat wel. Als f reëel analytisch was was hij gelijk aan zijn Taylorreeks (Gevolg 15.2.10), en dit is dus niet het geval.

Opgave 4. (a) Uit het geval $n = 1$ volgt dat

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(x) = f(x)\frac{\partial g}{\partial x_i}(x) + g(x)\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$$

voor alle $1 \leqslant i \leqslant n$. Er volgt dat

$$\begin{aligned}
\nabla h(x) &= \left(\frac{\partial h}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial h}{\partial x_n}(x)\right) \\
&= \left(f(x)\frac{\partial g}{\partial x_1}(x) + g(x)\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \ldots, f(x)\frac{\partial g}{\partial x_n}(x) + g(x)\frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right) \\
&= f(x)\nabla g(x) + g(x)\nabla f(x).
\end{aligned}$$

(b) Omdat f en g C^1-functies zijn is h het ook. Immers, uit het bewijs van onderdeel (a) volgt dat alle partiële afgeleiden $\frac{\partial h}{\partial x_i}$ bestaan en continu zijn. Wegens Stelling 17.3.8 geldt dat $f'(x) = \nabla f(x)$, en net zo voor g en h. Het gevraagde volgt nu direct uit (a).

Opgave 5. (a) Neem bijvoorbeeld $f_n = \chi_{[n,n+1]} - \chi_{[n+1,n+2]}$, met $n \geqslant 0$. Er geldt dan $\int f_n = 0$ voor alle n, en $\sum_n f_n = \chi_{[0,1]}$, dus $\int \sum f_n = 1$ en $\sum \int f_n = 0$.

(b) Als alle f_n niet-negatief zijn dan vormen de partiële sommen $\sum_{n=0}^N f_n$ een monotoon stijgende rij als $N \to \infty$, dus wegens de monotone-convergentie-stelling geldt

$$\int \sum_{n=0}^{\infty} f_n = \int \sup_N \sum_{n=0}^{N} f_n = \sup_N \int \sum_{n=0}^{N} f_n = \sup_N \sum_{n=0}^{N} \int f_n = \sum_{n=0}^{\infty} \int f_n.$$