Hertentamen Analyse 2

2 april 2013, 12:30–15:30.

Dit tentamen bestaat uit vijf opgaven. Motiveer uw antwoorden, en geef aan welke stellingen u gebruikt. Zet op elk blad uw naam en studentnummer, en lever geen kladblaadjes in.

Opgave 1. Laat d de door $\mathbb{R}$ geïnduceerde Euclidische metriek op $\mathbb{Z}$ zijn.

(a) Is $\mathbb{Z}$ met deze metriek een volledige ruimte?

(b) Is elke $X \subseteq \mathbb{R}$ met de door $\mathbb{R}$ geïnduceerde metriek een volledige ruimte?

Opgave 2. Zij $\{G_i\}_{i \in I}$ een open overdekking van $[0, 1]$. Bewijs dat er een reëel getal $\delta > 0$ bestaat zodat voor alle intervallen $X \subseteq [0, 1]$ met $|X| < \delta$ geldt dat $X \subseteq G_i$ voor zekere $i \in I$. Hier geeft $|X|$ de lengte aan van het interval X.

Opgave 3. (a) Op welk interval is de machtreeks $\sum_{n=0}^{\infty}(1-x)^n$ puntsgewijs convergent?

(b) Bewijs dat de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} x(1-x)^n$ uniform convergent is op het interval $[\frac{1}{2}, 1]$.

(c) Bewijs dat de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} x(1-x)^n$ niet uniform convergent is op het interval $[0, 1]$.

Opgave 4. Laat $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gedefiniëerd zijn door

$$f(x, y, z) = (x + xyz, y + xy, z + 2x + 3z^2).$$

(a) Bewijs dat f differentiëerbaar is in elk punt (x, y, z), en bepaal de afgeleide van f.

(b) Is f inverteerbaar op een open omgeving van $(0, 0, 0)$?

Opgave 5. Stel dat voor elke $n \in \mathbb{N}$ de verzameling $X_n \subseteq [0, 1]$ meetbaar is, met maat $m(X_n) = \frac{1}{n^2}$. Bewijs dat

$$m\Big(\bigcup_n \bigcap_{m \geqslant n} (\mathbb{R} \setminus X_m)\Big) = 1.$$