Tentamen Analyse 2

17 januari 2012, 8:30–11:30.

Dit tentamen bestaat uit vijf opgaven. Motiveer uw antwoorden, en geef aan welke stellingen u gebruikt. Zet op elk blad uw naam en studentnummer, en lever geen kladblaadjes in.

Opgave 1. Zij (X, d) een metrische ruimte en zij $E \subseteq X$.

(a) Wanneer is $x \in X$ een verdichtingspunt (adherent point) van E ?

(b) Bewijs: x is verdichtingspunt van E desda er bestaat een rij $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ van punten uit E zodat $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

Opgave 2. Zij X een compacte metrische ruimte en $f_n : X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, een monotone rij functies, d.w.z. $f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$ voor alle x en n. Stel dat f_n continu is voor alle n en dat de rij f_n puntsgewijs convergeert naar een continue f.

(a) Zij $\varepsilon > 0$. Laat zien dat de verzamelingen

$$E_n = \big\{x \in X : |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon\big\}$$

een open overdekking vormen van X.

(b) Bewijs dat de rij f_n uniform naar f convergeert.

Opgave 3. Stel $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is reëel analytisch.

(a) Volgt hieruit dat f een C^k-functie is voor alle k?

(b) Geef met $f^{(k)}$ de k-de afgeleide van f aan. Stel dat $f(0) = 0$ en $f^{(k)}(0) = 0$ voor alle $k \geqslant 1$. Volgt nu dat $f(x) = 0$ voor alle x in een open omgeving van 0?

Opgave 4. (a). Zij $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ continu differentiëerbaar. Formuleer de inverse functie-stelling voor deze situatie.

(b). Zij $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeven door $f(x, y) = (x^2 y, x + y)$. Bepaal de afgeleide van f in het punt $(-1, \frac{1}{2})$.

(c). Laat zien dat f inverteerbaar is op een omgeving van $(-1, \frac{1}{2})$.

(d). Bepaal de afgeleide van f^{-1} in het punt $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

Opgave 5. Zij $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ een meetbare verzameling, en zij $f : \Omega \to \mathbb{R}^*$.

(a) Wat betekent het dat f meetbaar is?

(b) Wat betekent het dat f absoluut integreerbaar is?

(c) Geef de ruimte van absoluut integreerbare functies op Ω aan met $L^1(\Omega)$, en definiëer een functie d op $L^1(\Omega) \times L^1(\Omega)$ door

$$d(f, g) = \int_\Omega |f - g|.$$

Welke eigenschappen van een metriek heeft de functie d ? (U hoeft deze eigenschappen niet te bewijzen.)

Beknopte uitwerkingen

N.B. Andere antwoorden kunnen mogelijk zijn.

1 (b). Stel x is verdichtingspunt van E. Voor elke n, kies $x_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap E$. Dan geldt voor elke n dat $d(x, x_n) < \frac{1}{n}$, dus $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

Stel omgekeerd dat $x_n \in E$ zodat $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Gegeven $\varepsilon > 0$, kies $x_n \in E$ met $d(x, x_n) < \varepsilon$. Dan $x_n \in B(x, \varepsilon)$ dus $B(x, \varepsilon) \neq \emptyset$.

2 (a). E_n is open omdat f_n en f continu zijn. Omdat f_n naar f convergeert is er voor elke x een n met $x \in E_n$.

2 (b). Gegeven $\varepsilon > 0$ moeten we bewijzen dat er n bestaat zodat

$$\forall m \geqslant n \forall x (|f(x) - f_m(x)| < \varepsilon). \tag{1}$$

Omdat de rij f_n monotoon is geldt $E_n \subseteq E_{n+1}$. Wegens compactheid heeft de overdekking $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ een eindige deeloverdekking. Hieruit volgt dat er n bestaat met $E_n = X$. Wegens monotonie is dit equivalent met (1).

3 (a). Ja, dit volgt uit Propositie 15.2.6 aangezien f reëel analytisch is in elke $a \in \mathbb{R}$.

(b). Ja: In de Taylorreeks van f rond 0 zijn alle termen gelijk aan 0. Omdat f reëel analytisch is, is f op een omgeving van 0 gelijk aan zijn Taylorreeks rond 0, en dus is f op deze omgeving constant 0.

4 (b). f is een C^1-functie, dus $f'(x, y)$ is gelijk aan de matrix van partiële afgeleiden:

$$f'(x, y) = \begin{pmatrix} 2xy & x^2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

In het bijzonder geldt

$$f'(-1, \tfrac{1}{2}) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c). De matrix $f'(-1, \frac{1}{2})$ uit (b) is inverteerbaar (want de determinant is ongelijk nul) dus wegens de inverse functie-stelling zijn er open omgevingen U van $(-1, \frac{1}{2})$ en V van $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ zodat f een bijectie is van U naar V. In het bijzonder is f inverteerbaar op U.

(d). Wegens de inverse functie-stelling geldt

$$(f^{-1})'(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}) = f'(-1, \tfrac{1}{2})^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

5 (c). d voldoet aan alle eigenschappen van een metriek behalve de eigenschap $d(f,g) = 0 \Rightarrow f = g$. Er geldt namelijk $d(f,g) = 0 \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ voor bijna alle x.