Hertentamen Analyse 2

4 mei 2012, 14:00–17:00.

Dit tentamen bestaat uit vijf opgaven. Motiveer uw antwoorden, en geef aan welke stellingen u gebruikt. Zet op elk blad uw naam en studentnummer, en lever geen kladblaadjes in.

Opgave 1. Zij A een metrische ruimte met metriek d. Definiëer een functie d_H op de deelverzamelingen van A door

$$d_H(X,Y) = \max\left\{ \sup_{x\in X}\inf_{y\in Y} d(x,y), \sup_{y\in Y}\inf_{x\in X} d(x,y) \right\}.$$

(a) Bewijs dat $d_H(X,Y) < \infty$ als X en Y begrensd zijn.

(b) Schrijf voor het gemak $\Phi(X,Y) = \sup_{x\in X}\inf_{y\in Y} d(x,y)$. Bewijs dat $\Phi(X,Z) \leqslant \Phi(X,Y) + \Phi(Y,Z)$ voor alle niet-lege deelverzamelingen X, Y, Z van A.

(c) Bewijs dat d_H een metriek is op de niet-lege compacte deelverzamelingen van A.

Opgave 2. Bewijs de Weierstrass M-test: Zij (X,d) een metrische ruimte, en zij $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ een rij in $C(X \to \mathbb{R})$ zodat $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_\infty$ convergeert. Dan convergeert de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ uniform naar een functie $f \in C(X \to \mathbb{R})$. (U mag hierbij gebruiken dat $C(X \to \mathbb{R})$ volledig is.)

Opgave 3. Stel dat voor alle $\varepsilon > 0$ geldt dat de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ uniform convergeert op het interval $[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$. Volgt hieruit dat de reeks uniform convergeert op het interval $(-1,1)$? Geef een bewijs of een tegenvoorbeeld.

Opgave 4. Zij $S \subseteq \mathbb{R}^n$ open. Een functie $f : S \to \mathbb{R}$ heet *homogeen van graad* p als $f(\lambda x) = \lambda^p f(x)$ voor alle $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$, en alle $x \in S$ met $\lambda x \in S$. Stel nu dat f deze eigenschap heeft en bovendien continu differentiëerbaar is in $x \in S$. Bewijs dat $x \cdot \nabla f(x) = pf(x)$. (Hint: beschouw de functie $g(\lambda) = f(\lambda x)$.)

Opgave 5. (a) Stel $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$, en stel dat B meetbaar is van maat 0. Bewijs dat A dan ook meetbaar is van maat 0.

(b) Stel dat $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ meetbaar is en dat voor $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ geldt dat $f(x) = g(x)$ voor bijna alle x. Bewijs dat g ook meetbaar is.