Tentamen Analyse 2

21 januari 2011, 14:00–17:00.

Dit tentamen bestaat uit vijf opgaven. Lees ook de achterzijde. Motiveer je antwoorden, en geef aan welke stellingen je gebruikt.

Opgave 1. Zij X een verzameling en $d : X \times X \to \mathbb{R}$ een functie die voor alle $x, y, z \in X$ voldoet aan

(i) $d(x, x) = 0$,

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$,

(iii) $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$.

(a) Laat zien dat $d(x, y) \geqslant 0$ voor alle x en y.

(b) Volgt dat d een metriek is op X? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.

Opgave 2. Definiëer voor elke n de functie $f_n : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ door

$$f_n(x) = \frac{3x^2\left(\frac{1}{n^2} + x^2\right) - 2x^4}{\left(\frac{1}{n^2} + x^2\right)^2}.$$

(a) Convergeert f_n puntsgewijs naar een functie f op $[-1, 1]$?

(b) Convergeert f_n uniform naar een functie f op $[-1, 1]$?

Opgave 3. (a) Geef de machtreeks voor $\frac{1}{1-x}$ rond $x = 0$. (U hoeft geen afleiding te geven.) Wat is de convergentiestraal R?

(b) Gebruik (a) om een machtreeks voor $\frac{1}{1+x}$ rond $x = 0$ te krijgen.

(c) Gebruik (b) om een machtreeks voor $\ln(1 + x)$ rond $x = 0$ te krijgen.

(d) Bewijs dat $\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \dots$ (Hint: Abel.)

Opgave 4. Zij $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de functie gegeven door $g(r, \theta) = (r \cos\theta, r \sin\theta)$. De getallen r en θ heten ook wel de *poolcoördinaten* van het punt $g(r, \theta)$. Zij verder $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ een C^1-functie, en laat $h(r, \theta) = f(r \cos\theta, r \sin\theta)$.

(a) Geef de definitie van partiële afgeleide van f.

(b) Geef de afgeleide van f in het punt (x, y).

(c) Geef de afgeleide van g in het punt (r, θ).

(d) Druk de partiële afgeleiden van h uit in die van f.

Opgave 5. Zij $E \subseteq \mathbb{R}^n$ willekeurig.

(a) Hoe is de buitenmaat $m^*(E)$ gedefiniëerd?

(b) Wanneer geldt $m(E) = m^*(E)$?

(c) Zij E meetbaar. Laat zien dat er voor elke $\varepsilon > 0$ een open verzameling $O_\varepsilon \supseteq E$ bestaat zodat $m(O_\varepsilon \setminus E) < \varepsilon$.

(d) Bewijs dat er een aftelbare doorsnede G van open verzamelingen bestaat zodat $m(G \triangle E) = 0$. Hier is $G \triangle E = (E \setminus G) \cup (G \setminus E)$ het symmetrisch verschil van E en G.

Beknopte uitwerkingen

1 (a). Er geldt

$$\begin{aligned} 2d(x,y) &= d(x,y) + d(y,x) && \text{wegens (ii)} \\ &\geqslant d(x,x) && \text{wegens (iii)} \\ &= 0 && \text{wegens (i)} \end{aligned}$$

dus $d(x,y) \geqslant 0$ voor alle x en y.

1 (b). De functie d hoeft geen metriek te zijn: Er hoeft niet te gelden dat $d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$. Bijvoorbeeld, de functie d die constant 0 is voldoet aan de drie gegeven eigenschappen, maar is geen metriek (als X tenminste twee punten bevat).

2 (a). We kunnen f_n schrijven als

$$f_n(x) = \frac{3x^2}{\frac{1}{n^2} + x^2} - \frac{2x^4}{\left(\frac{1}{n^2} + x^2\right)^2}$$

en dit convergeert puntsgewijs naar de functie

$$f(x) = \begin{cases} 3 - 2 = 1 & \text{als } x \neq 0, \\ 0 & \text{als } x = 0. \end{cases}$$

2 (b). Als f_n uniform naar een functie f zou convergeren, dan zou f de puntsgewijze limiet uit onderdeel (a) moeten zijn (want limieten zijn uniek). Omdat alle functies f_n continu zijn, en continuïteit behouden blijft onder uniforme limieten, zou f het dan ook moeten zijn, wat echter niet zo is. Dus de convergentie is niet uniform.

3 (a). Zie Deel I. $R = 1$.

3 (b). $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$.

3 (c).

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+x} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

3 (d). De machtreeks uit (c) convergeert voor $x = 1$ (alternerende reeks). Wegens de Stelling van Abel is de machtreeks dan continu in $x = 1$, dus geldt $\ln 2 = \lim_{x \to 1} \ln(1 + x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1}$.

4 (a). Zie Def. 17.3.7.

4 (b). f is C^1 dus kunnen we wegens Stelling 17.3.8 de afgeleide schrijven als

$$f'(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix}.$$

We schrijven voor het gemak ook wel $f' = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$.

4 (c). Omdat $g \in C^1$ geldt $g' = Dg$, dus

$$g'(r, \theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial r}(r, \theta) & \frac{\partial g_1}{\partial \theta}(r, \theta) \\ \frac{\partial g_2}{\partial r}(r, \theta) & \frac{\partial g_2}{\partial \theta}(r, \theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}.$$

4 (d). Wegens de kettingregel hebben we $h'(r, \theta) = f'(g(r, \theta)) \cdot g'(r, \theta)$. Dit geeft

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial r} &= \cos\theta \frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial h}{\partial \theta} &= -r\sin\theta \frac{\partial f}{\partial x} + r\cos\theta \frac{\partial f}{\partial y}. \end{aligned}$$

5 (a). Zie Def. 18.2.4.

5 (b). Zie Def. 18.4.1.

5 (c). Dit volgt uit (a) en $m(E) = m^*(E)$: $m(E) = \inf \big\{ \sum_{n=0}^{\infty} m(B_n) : B_n \text{ aftelbare blok-overdekking } E \big\}$, dus voor elke $\varepsilon > 0$ is er een open verzameling $O_\varepsilon = \bigcup_n B_n \supseteq E$ zodat $m(O_\varepsilon) < m(E) + \varepsilon$. Nu zijn $O_\varepsilon \setminus E$ en E disjunct, dus $m(O_\varepsilon) = m(O_\varepsilon \setminus E) + m(E)$, dus $m(O_\varepsilon \setminus E) = m(O_\varepsilon) - m(E) < \varepsilon$.

5 (d). Laat O_ε als in (c) en neem $G = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_{\frac{1}{n}}$. Dan geldt $G \triangle E = G \setminus E \subseteq O_\varepsilon$ voor alle $\varepsilon > 0$, dus $m(G \setminus E) \leqslant m(O_\varepsilon \setminus E) \leqslant \varepsilon$ voor alle $\varepsilon > 0$, dus $m(G \setminus E) = 0$.