Hertentamen Analyse 2

4 mei 2011, 9:00–12:00.

Lees ook de achterzijde. Motiveer je antwoorden, en geef aan welke stellingen je gebruikt.

Opgave 1. Zij $2^{\mathbb{N}}$ de verzameling van alle functies $f : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$. Definiëer een functie d op $2^{\mathbb{N}}$ door $d(f, g) = \frac{1}{k+1}$, waar $k \in \mathbb{N}$ het kleinste getal is zodat $f(k) \neq g(k)$. Als zo'n k niet bestaat definiëren we $d(f, g) = 0$.

(a) Laat zien dat d een metriek is op $2^{\mathbb{N}}$.

(b) Bewijs dat de verzameling

$$F = \left\{ f \in 2^{\mathbb{N}} : \exists n \forall m \geqslant n \; f(m) = 0 \right\}.$$

dicht ligt in $2^{\mathbb{N}}$, dat wil zeggen, de afsluiting van F is gelijk aan $2^{\mathbb{N}}$.

Opgave 2. Stel $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is uniform continu voor elke n, en stel dat de rij f_n uniform naar een functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convergeert. Bewijs dat f uniform continu is.

Opgave 3. (a) Gegeven twee machtreeksen $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ en $\sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j$, wat zijn de coëfficiënten c_n in het convolutieproduct $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$?

(b) Gebruik het convolutieproduct om een machtreeks voor $\frac{1}{(1-x)^2}$ rond $x = 0$ te bepalen uit die voor $\frac{1}{1-x}$. Wat is de convergentiestraal R ?

Opgave 4. Zij $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gedefiniëerd door

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} x + y + (z-1)^2 + 1 \\ y + z + (x-1)^2 - 1 \\ z + x + (y-2)^2 + 3 \end{pmatrix}$$

(a) Geef de afgeleide van F in het punt (x, y, z).

(b) Bewijs dat F inverteerbaar is op een omgeving van het punt $(1, 2, 1)$ met behulp van de inverse functie-stelling.

Opgave 5. (a) Geef de definitie van Lebesgue-meetbaarheid.

(b) Stel $E \subseteq \mathbb{R}^n$ is meetbaar, en $F \subseteq E$ is zodanig dat $E \setminus F$ meetbaar is met $m(E \setminus F) = 0$. Bewijs dat F meetbaar is met $m(F) = m(E)$.

Beknopte uitwerkingen

1 (a). $d(f,f) = 0$ geldt per definitie.

Stel $d(f,g) = 0$. Dan is er geen k met $f(k) \neq g(k)$, dus geldt $f = g$.

$d(f,g) = d(g,f)$ is triviaal.

$d(f,h) \leqslant d(f,g) + d(g,h)$: Dit is duidelijk als twee of meer van f, g, h gelijk zijn. Stel dus dat ze alle ongelijk zijn, en stel dat h eerder van f verschilt dan g. (Het andere geval is symmetrisch.) Dan geldt $d(f,h) = d(g,h) \leqslant d(f,g) + d(g,h)$.

1 (b). Zij $g \in 2^{\mathbb{N}}$, en zij $\varepsilon > 0$. Te bewijzen: er is $f \in F$ met $d(f,g) < \varepsilon$. Zij $k \in \mathbb{N}$ groot genoeg zodat $\frac{1}{k+1} < \varepsilon$, en laat

$$f(n) = \begin{cases} g(n) & \text{als } n < k, \\ 0 & \text{als } n \geqslant k. \end{cases}$$

Dan $f \in F$ en $d(f,g) \leqslant \frac{1}{k+1} < \varepsilon$.

2. Stel $\varepsilon > 0$, en kies n groot genoeg zodat $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ voor alle x. Kies een uniforme δ met $|x-y| < \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon$. Stel nu $|x-y| < \delta$. Dan

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(y) + f_n(y) - f(y)| \\ &\leqslant |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)| \\ &\leqslant \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon. \end{aligned}$$

Dit bewijst de uniforme continuïteit van f. (Als je op het laatst graag ε ziet in plaats van 3ε, schrijf dan aan het begin overal $\varepsilon/3$.)

3 (a). $c_n = \sum_{i+j=n} a_i b_j = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$.

3 (b). $\frac{1}{1-x} = \sum_{i=0}^{\infty} x^i$, dus $\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$. Voor R geldt dat $1/R = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1} = 1$, dus $R = 1$.

4 (a).

$$F'(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2z-2 \\ 2x-2 & 1 & 1 \\ 1 & 2y-4 & 1 \end{pmatrix}$$

4 (b). De determinant van de afgeleide in het punt $(1, 2, 1)$ is

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

Dit is ongelijk aan 0, dus de matrix $F'(1, 2, 1)$ is inverteerbaar, dus F is inverteerbaar op een omgeving van $(1, 2, 1)$ wegens de inverse functie-stelling.

5 (b). Te bewijzen: voor alle $A \subseteq \mathbb{R}^n$ geldt $m^*(A) = m^*(A \cap F) + m^*(A \setminus F)$.
$\leqslant$ geldt altijd wegens sub-additiviteit van m^*.
$\geqslant$: Er geldt

$$\begin{aligned} m^*(A) &\geqslant m^*(A \cap E) + m^*(A \setminus E) && \text{wegens meetbaarheid } E \\ &\geqslant m^*(A \cap F) + m^*(A \setminus E) && \text{want } A \cap F \subseteq A \cap E. \end{aligned}$$

Het is dus voldoende om nog te bewijzen dat $m^*(A \setminus F) \leqslant m^*(A \setminus E)$. Dit geldt aangezien

$$\begin{aligned} m^*(A \setminus F) &\leqslant m^*((A \setminus E) \cup (E \setminus F)) \\ &\leqslant m^*(A \setminus E) + m^*(E \setminus F) && \text{wegens subadditiviteit} \\ &= m^*(A \setminus E) && \text{want } m^*(E \setminus F) = 0. \end{aligned}$$

F is zodoende meetbaar, en er geldt $m(F) + m(E \setminus F) = m(E)$, dus met $m(E \setminus F) = 0$ volgt $m(F) = m(E)$.