Radboud Universiteit Nijmegen

Tentamen Analyse 2 WB001B
6 mei 2010, 9.00–12.00

Het gebruik van een rekenmachine en/of telefoon is niet toegestaan. U mag geen gebruik maken van de boeken *Analysis I, II.*
Geef precieze argumenten en antwoorden. Maak uw redenering zo helder mogelijk, en geef duidelijk aan welke resultaten u gebruikt in uw antwoord.

---

1. Beschouw de rijtjesruimte

$$c_0 \;=\; \{(x_n)_{n=0}^{\infty} \mid \lim_{n\to\infty} x_n = 0\}$$

U mag gebruiken dat c_0 een vectorruimte is.

(a) Definieer de afbeelding $d\colon c_0 \times c_0 \to \mathbb{R}$ door $d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n - y_n|$ voor twee rijtjes $\mathbf{x} = (x_n)_{n=0}^{\infty}$, $\mathbf{y} = (y_n)_{n=0}^{\infty}$ uit c_0. Laat zien dat d een metriek definieert.

(b) Is de metrische ruimte (c_0, d) een volledige metrische ruimte?

(c) Geef de definitie van een compacte verzameling K in een metrische ruimte (X, d_X).

(d) Is de verzameling
$$B_1 = \{\mathbf{x} = (x_n)_{n=0}^{\infty} \in c_0 \mid \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| \leq 1\}$$
compact?

2. (a) Formuleer de impliciete functiestelling.

(b) Beschouw de functie $f\colon \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$f(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, x) \;=\; \sum_{i=0}^{5} a_i\, x^i$$

en veronderstel dat c^0 een enkelvoudig nulpunt is van het 5-de graads polynoom $p^0(x) = \sum_{i=0}^{5} a_i^0\, x^i$, ofwel $(p^0)'(c^0) \neq 0$ en $f(a_0^0, a_1^0, a_2^0, a_3^0, a_4^0, a_5^0, c^0) = 0$. Maak de uitspraak *een enkelvoudig nulpunt van een* 5*de graads polynoom is lokaal een* C^1*-functie van de coëfficiënten* precies.

ZOZ

3. Gegeven een rij $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ van functies $f_n\colon (X, d_X) \to (Y, d_Y)$, waarbij (X, d_X) en (Y, d_Y) metrische ruimtes zijn. Veronderstel ook dat $f\colon (X, d_X) \to (Y, d_Y)$

   (a) Geef de definitie van uniforme convergentie van $\lim_{n\to\infty} f_n = f$.

   (b) Veronderstel dat voor een $x_0 \in X$ geldt dat f_n continu is in x_0 en dat $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ uniform. Bewijs dat f continu is in x_0.

   (c) Veronderstel dat $f_n\colon (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ een begrensde functie is voor elke $n \in \mathbb{N}$, en dat $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ uniform. Bewijs dat $f\colon (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ een begrensde functie is.

4. De uitwendige maat m^* van een verzameling $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ is gedefinieerd als het infimum van $\sum_{j\in J} \mathrm{vol}(B_j)$ waarbij $\Omega \subset \cup_{j\in J} B_j$ en $\{B_j \mid j \in J\}$ een hoogstens aftelbare verzameling van open balken in $\mathbb{R}^n$ is.

   (a) Zij $A \subset \mathbb{R}^n$. Wanneer heet de verzameling A meetbaar?

   (b) Veronderstel dat A en B meetbare verzamelingen zijn. Bewijs dat $A \cup B$ en $A \cap B$ ook meetbaar zijn.

   (c) Veronderstel dat A meetbaar is. Wanneer heet $f\colon A \to \mathbb{R}^*$ (NB De uitgebreide reële rechte.) een meetbare functie?

   (d) Laat zien dat de puntsgewijze limiet van meetbare functies meetbaar is. Dus als $f_n\colon A \to \mathbb{R}^*$, $A \subset \mathbb{R}^n$ meetbaar, meetbare functies zijn en $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ geldt voor iedere $x \in A$ voor zekere functie $f\colon A \to \mathbb{R}^*$, dan is f ook meetbaar.

5. (a) Formuleer de gedomineerde convergentiestelling van Lebesgue.

   (b) Definieer
$$f_n(x) = \frac{x^2}{x^2 + (1 - nx)^2}, \qquad x \in [0, 1].$$

   (i) Laat zien dat de rij $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ uniform begrensd is.

   (ii) Bepaal
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n$$

   (iii) Is $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$ uniform convergent?

Normering							
Opgave	1	2	3	4	5	Gratis	Totaal
Punten	11	8	8	10	8	5	50

Het tentamencijfer T is het totaal aantal behaalde punten gedeeld door 5.
Het eindcijfer is de gebruikelijke afronding van het maximum van T en $\frac{7}{10}T + \frac{3}{10}H$, waarbij H het gemiddelde cijfer is van de 5 beste ingeleverde set huiswerkopgaven, mits er minimaal 5 keer huiswerk is ingeleverd en $H \geq 5.5$.

Summiere uitwerkingen en hints

Opgave 1

1a (2 punten) Check Definition 12.1.2 (p. 390), en vergeet vooral niet te laten zien dat $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \infty$. De driehoeksongelijkheid gebruikt dat voor positieve rijen $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ en $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ geldt

$$\sup_n (a_n + b_n) \leq \sup_n a_n + \sup_n b_n$$

(en géén gelijkheid in het algemeen.)

1b (5 punten) Ja, dit gaat als Theorem 14.4.5 (p. 454). Bekijk een Cauchyrij $(\mathbf{x}^n)_{n=0}^{\infty}$ met $\mathbf{x}^n \in c_0$. Dan voor elke $i \in \mathbb{N}$ is

$$|\mathbf{x}_i^n - \mathbf{x}_i^m| \leq \sup_{i \in \mathbb{N}} |\mathbf{x}_i^n - \mathbf{x}_i^m| = d(\mathbf{x}^n, \mathbf{x}^m)$$

waaruit volgt dat $(\mathbf{x}_i^n)_{n=0}^{\infty}$ een Cauchyrij in $\mathbb{R}$ is, en dus convergent naar $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}$. Dan nog te bewijzen:

- $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_i)_{i=0}^{\infty} \in c_0$
- $\lim_{n \to \infty} \mathbf{x}^n = \mathbf{x}$ met betrekking tot de metriek d.

Omdat $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, N$ zodat voor $\forall\, n, m > N$, $\sup_j |\mathbf{x}_j^n - \mathbf{x}_j^m| < \varepsilon$, volgt door $n \to \infty$ te nemen dat $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, N$ zodat voor $\forall\, m > N$, $\sup_j |\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_j^m| < \varepsilon$. Dus de tweede uitspraak volgt en voor de eerste merken we op

$$|\mathbf{x}_j| \leq |\mathbf{x}_j^m| \, + \, |\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_j^m|.$$

Kies $\varepsilon > 0$ willekeurig, en daarbij een vaste m zodat $\sup_j |\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_j^m| < \varepsilon$. Omdat $\mathbf{x}^m \in c_0$ bestaat er een $M \in \mathbb{N}$ zodanig dat voor alle $j > M$ $|\mathbf{x}_j^m| \leq \varepsilon$. Dus voor deze M geldt

$$|\mathbf{x}_j| \leq |\mathbf{x}_j^m| \, + \, |\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_j^m| \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

voor alle $j > M$. Dus $\mathbf{x} \in c_0$.

1c (1 punten) Definition 12.5.3 (p. 413).

1d (3 punten) Nee. Bekijk de rij $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ met $x_n \in c_0$ gedefinieerd door $(x_n)_i = \delta_{n,i}$ (dus overal 0 behalve op de n-de plaats een 1). Dan $x_n \in B_1$ en $d_\infty(x_n, x_m) = 1$ voor $n \neq m$. Dus de rij $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ kan nooit aan de definitie van convergente deelrij voldoen (voor $\varepsilon < 1$).

Opgave 2

2a (3 punten) Theorem 17.8.1 (p. 568).

2b (5 punten) De functie $f\colon \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}$ is C^1, want het is een polynoom. Dan geldt

$$f(a_0^0, a_1^0, a_2^0, a_3^0, a_4^0, a_5^0, c^0) = 0,$$

en

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a_0^0, a_1^0, a_2^0, a_3^0, a_4^0, a_5^0, c^0) = (p^0)'(c^0) \neq 0$$

want het polynoom p^0 heeft een enkelvoudig nulpunt. Volgens de impliciete functiestelling bestaan er een open deelverzameling $U \subset \mathbb{R}^6$ met $(a_0^0, a_1^0, a_2^0, a_3^0, a_4^0, a_5^0) \in U$ en een open deelverzameling $V \subset \mathbb{R}^7$ met $(a_0^0, a_1^0, a_2^0, a_3^0, a_4^0, a_5^0, c^0) \in V$ en een C^1-functie $g\colon U \to \mathbb{R}$ zodanig dat

$$\{(a_0^0, a_1^0, a_2^0, a_3^0, a_4^0, a_5^0, c^0) \in V \mid f(a_0^0, a_1^0, a_2^0, a_3^0, a_4^0, a_5^0, c^0) = 0\} =$$
$$\{(a_0^0, a_1^0, a_2^0, a_3^0, a_4^0, a_5^0, g(a_0^0, a_1^0, a_2^0, a_3^0, a_4^0, a_5^0)) \mid (a_0^0, a_1^0, a_2^0, a_3^0, a_4^0, a_5^0) \in U\}$$

ofwel het enkelvoudige nulpunt is een C^1-functie g van de parameters $(a_0^0, a_1^0, a_2^0, a_3^0, a_4^0, a_5^0)$ van het polynoom.

Opgave 3

3a (2 punten) Definition 14.2.7 (p. 447).

3b (4 punten) Theorem 14.3.1 (p. 449).

3c (2 punten) Proposition 14.3.6 (p. 451).

Opgave 4

4a (2 punten) Definition 18.4.1 (p. 590)

4b (4 punten) Lemma 18.4.4 (c) (p. 591) (zie ook de uitwerkingen op blackboard)

4c (1 punten) Definition 18.5.9 (p. 599) (met de aanpassing $f^{-1}((a, +\infty])$.)

4d (3 punten) Lemma 18.5.10 (p. 600)

Opgave 5

5a (3 punten) Theorem 19.3.4 (p. 619)

4b (5 punten)

(i) Merk op $x^2 + (1 - nx)^2 \geq x^2$, zodat $|f_n(x)| \leq \frac{x^2}{x^2} = 1$. Dus $\|f_n\|_\infty \leq 1$ voor all $n \in \mathbb{N}$, ofwel $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ is uniform begrensd.

(ii) Pas de gedomineerde convergentiestelling toe met dominerende functie $F(x) = 1$. Merk op dat $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ puntsgewijs.

(iii) Nee, $f_n(1/n) = 1$, dus $\|f_n\|_\infty \geq 1$ en gaat dus niet naar nul (en zelfs $\|f_n\|_\infty = 1$ vanwege (i)).