Radboud Universiteit

Tussentoets Analyse 1 WP001B
24 januari 2020, 08:30–11:30

Het gebruik van een rekenmachine/GR, telefoon, boek, aantekeningen e.d. is niet toegestaan. Geef precieze argumenten en antwoorden. Zorg dat uw redeneringen en schrijfstijl helder en beknopt zijn. Noteer op **elk vel** uw naam en studentnummer.

---

1. (i) Zij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een dalende rij van reële getallen. Veronderstel bovendien dat deze rij van onderen begrensd is. Bewijs dat de rij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent is, en geef de limiet.

   (ii) Beschouw de verzameling $J = \{\frac{1}{3^n} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Bewijs dat $\inf J = 0$. (Hint: als $L = \inf J > 0$, dan is $3L$ geen ondergrens van J.)

   (iii) Laat zien dat $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{3^n} = 0$.

   (iv) Is de verzameling $J \subset \mathbb{R}$ een gesloten verzameling?

2. Formuleer en bewijs de stelling van Bolzano-Weierstrass. (Één bewijs is voldoende.)

3. Zij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een begrensde rij van reële getallen. Bewijs de volgende uitspraak: de rij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is convergent dan en slechts dan als $\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n$.

4. (i) Veronderstel dat $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ convergent is en dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt dat $a_n \geq 0$. Bewijs dat $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^4$ convergent is.

   (ii) Is de volgende uitspraak waar of niet waar? Veronderstel dat $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ convergent is, dan geldt dat $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^4$ convergent is.

5. (i) Wanneer heet de verzameling $A \subset \mathbb{R}$ open? Geef een voorbeeld.

   (ii) Wanneer heet de verzameling $A \subset \mathbb{R}$ gesloten? Geef een voorbeeld.

   (iii) Bewijs dat de verzameling $A \subset \mathbb{R}$ is gesloten dan en slechts dan als A^c (met $A^c = \mathbb{R} \setminus A$ het complement) open is.

   (iv) Veronderstel dat $A_\alpha \subset \mathbb{R}$ voor elke $\alpha \in I$ (waarbij I een willekeurige verzameling is) een open verzameling is. Bewijs dat $\cup_{\alpha\in I} A_\alpha$ een open verzameling is.

   (v) Bewijs dat $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

ZOZ! De tussentoets gaat verder op de achterkant!

Beantwoord de volgende meerkeuzevragen:[1]

6. Als de machtreeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ convergentiestraal R heeft, dan is de convergentiestraal van $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n$ gelijk aan

   A) 0 B) 1 C) R D) kan alles worden afhankelijk van de rij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

7. De convergentiestraal van de machtreeks $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{2n}}{(2n)!} x^n$ is

   A) 0 B) $4e^{-2}$ C) 1 D) π E) e^2 F) $2\pi^2$ G) ∞

8. Welke van de volgende reeksen is absoluut convergent? Meerdere juiste antwoorden mogelijk!

   A) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+1}}$ B) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[4]{n^3+1}}$ C) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2 + n}{n^3}$ D) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2\sqrt{n} + n^3}{n^4 + n^2\sqrt{n} + \pi}$

   E) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^4+1}}$ F) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n^5+1}}$ G) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ H) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{n\sqrt{n}}$

Normering

Opgave	1	2	3	4	5	6	7	8	Gratis	Totaal
Punten	20	15	15	15	10	5	5	5	10	100

[1] Alleen het antwoord telt.

Toelichting en summiere uitwerkingen.

1. (i) Theorem 3.2.4.
   (ii) Vergelijk Theorem 3.1.1(i).
   (iii) Combineer (i) en (ii)
   (iv) Nee, $\inf J \notin J$. Zie Example 5.1.6, Proposition 5.1.7.

2. Theorem 3.4.1.

3. Theorem 3.5.3.

4. (i) Omdat $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ convergent is, volgt $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ (Proposition 4.1.4). In het bijzonder, de rij $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ is begrensd (Proposition 3.2.3), zeg $|a_n| \leq M$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Dan geldt
$$0 \leq a_n^4 \leq a_n M^3, \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$
omdat $a_n \geq 0$. Met $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ convergent, is ook $\sum_{n=0}^{\infty} M^3 a_n$ convergent (Theorem 4.1.2). Nu volgt uit Corollary 4.2.2 dat $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^4$ convergent is.
   (ii) Nee. Neem $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt[4]{n+1}}$, dan is $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ convergent vanwege Theorem 4.3.3, en
$$a_n^4 = \frac{1}{n+1}$$
en dus is $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^4$ divergent vanwege Corollary 4.2.5.

5. (i) Als $A = A^\circ$, zie p. 135, §5.2. Bv $(0,1)$.
   (ii) Als $A = \overline{A}$, zie p. 132, §5.1. Bv $[0,1]$.
   (iii) Proposition 5.2.1(ii).
   (iv) Corollary 5.2.2(ii).
   (v) Kies $x \in \overline{A \cap B}$, dan bestaat er een rij $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ met $y_n \in A \cap B$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ met
$$\lim_{n\to\infty} y_n = x$$
zie Proposition 5.1.1. Omdat $y_n \in A$ voor alle n, volgt ook dat $x \in \overline{A}$ mbv Propostion 5.1.1. Omdat $y_n \in B$ voor alle n, volgt ook dat $x \in \overline{B}$, weer door Propostion 5.1.1. Dus $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$.

6. C

7. B

8. E, F, H