Radboud Universiteit

Tussentoets Analyse 1 WP001B
19 januari 2022, 9:00–11:00

Het gebruik van een rekenmachine/GR, telefoon, syllabus, boek, aantekeningen e.d. is **niet toegestaan**. Geef precieze argumenten en antwoorden. Zorg dat uw redeneringen en schrijfstijl helder en beknopt zijn. Noteer op **elk vel** uw naam en studentnummer.

---

1. (i) Wanneer heet de rij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent?

   (ii) Bewijs de volgende uitspraak: een convergente rij is een begrensde rij.

2. Veronderstel dat $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ begrensde rijen zijn. Bewijs dat

$$\liminf_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n \leq \limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n).$$

   Hint: laat zien $\forall\,\varepsilon > 0$ we hebben dat $\exists\, K \in \mathbb{N}$ zodat voor alle $k \geq K$ geldt

$$\liminf_{n\to\infty} a_n - \varepsilon < \inf_{n\geq k} a_n \leq \liminf_{n\to\infty} a_n.$$

   en gebruik dit om in te zien dat $\limsup_{n\to\infty}(a_n+b_n) \geq \liminf_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n - \varepsilon$.

3. (i) Wanneer heet $A \subset \mathbb{R}$ een rijcompacte verzameling?

   (ii) Wat zegt de stelling van Heine-Borel? (Geen bewijs gevraagd.)

   (iii) Zij I een indexverzameling en veronderstel dat $A_\alpha \subset \mathbb{R}$ is een rijcompacte verzameling voor elke $\alpha \in I$. Bewijs dat $\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha$ een rijcompacte verzameling is.

   (iv) Zij $A \subset \mathbb{R}$ een rijcompacte verzameling, en $f\colon A \to \mathbb{R}$ een continue functie. Bewijs dat f begrensd is.

4. (i) Zij $a < b$ en $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ een continue functie. Veronderstel bovendien dat f injectief is. Bewijs dat f is óf strikt stijgend óf strikt dalend. (Hint: als $f(a) < f(b)$ bewijs dan dat $a \leq x < y \leq b$ impliceert dat $f(x) < f(y)$. Bewijs dit uit het ongerijmde door $E = \{c \in [a,b] \mid f(c) \geq f(y)\}$ te bekijken, en f in $z = \inf E$ te bestuderen.)

   (ii) Laat zien dat er een injectieve functie $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ bestaat die niet óf strikt stijgend óf strikt dalend is.

ZOZ! De tussentoets gaat verder op de achterkant!

Beantwoord de volgende twee meerkeuzevragen op dit vel door een kruis in het betreffende vak van het goede antwoord te plaatsen, en lever het in. In geval van onduidelijkheid bij het nakijken over welk vakje is aangekruist, zal het worden gerekend als *niet beantwoord*. Er zijn 6 punten per goed antwoord, 0 punten voor een niet gegeven antwoord en -2 punt (aftrek!) voor een fout antwoord.

Naam: ________________________
Studentnummer: ________________________

5. Gegeven zijn de rij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en de rij $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Beschouw de volgende twee uitspraken:

(a) als beide rijen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent zijn, dan is de rij $(a_nb_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent;

(b) als de rij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent is, dan is ook de rij $(a_n^3)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.

Dan geldt:

A	(a) en (b) zijn waar	B	(a) is waar en (b) is niet waar
C	(a) en (b) zijn niet waar	D	(a) is niet waar en (b) is waar

Uw antwoord:

A	**B**	**C**	**D**

6. Zij $a < b$ en $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ een continue functie . Welke van de volgende uitspraken is waar:

A Als f een lokaal maximum heeft in $x_0 \in [a,b]$, dan is $f'(x_0) = 0$.

B Als f differentieerbaar is in elke $x \in (a,b)$ en $f'(x) = 0$ voor $\forall\, x \in (a,b)$, dan $f(a) = f(b)$.

C Als $f(a) = f(b)$, dan is er een $c \in (a,b)$ met $f'(c) = 0$.

D Als $f(a) = f(b)$, dan bestaat er een $c \in (a,b)$ met $f(c) = f(a)$.

Uw antwoord:

A	**B**	**C**	**D**

Normering

Opgave	1	2	3	4	5	6	Gratis	Totaal
Punten	15	20	25	20	6	6	8	100

Toelichting en summiere uitwerkingen.

De verwijzingen zijn naar de syllabus op Brightspace.

1. (i) Definition 3.2.1.
   (ii) Proposition 3.2.8.

2. Dit is een van de ongelijkheden uit Exercise 3.4.11.

   Stel $L = \liminf_{n\to\infty} a_n = \sup_k \inf_{n\geq k} a_n$, en laat $\varepsilon > 0$ willekeurig. Dan $\exists\, K \in \mathbb{N}$ zodat voor alle $k \geq K$ geldt
   $$L - \varepsilon < \inf_{n\geq k} a_n \leq L.$$
   In het bijzonder, voor alle $n \geq K$ geldt $L - \varepsilon < a_n$. Dus voor alle $n \geq K$ geldt $a_n + b_n > b_n + L - \varepsilon$. Dus
   $$\sup_{n\geq k}(a_n + b_n) \geq L - \varepsilon + \sup_{n\geq k} b_n$$
   voor alle $k \geq K$. Neem het infimum over $k \geq K$,
   $$\inf_{k\geq K} \sup_{n\geq k}(a_n + b_n) \geq L - \varepsilon + \inf_{k\geq K} \sup_{n\geq k} b_n$$
   Dus volgt
   $$\limsup_{n\to\infty} a_n + b_n \geq \liminf_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n - \varepsilon.$$
   Omdat $\varepsilon > 0$ willekeurig is, volgt de gevraagde ongelijkheid.

3. (i) Definition 4.3.1.
   (ii) Theorem 4.3.3.
   (iii) Elke A_α is gesloten en begrensd, vanwege de Heine-Borel stelling. In het bijzonder is dan $\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha$ begrensd. Omdat willekeurige doorsnede van gesloten verzamelingen weer een gesloten verzameling is, volgt dat $\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha$ een gesloten, begrensde verzameling is. Met behulp van de Heine-Borel stelling volgt dat $\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha$ rijcompact is.
   (iv) Stel f is niet begrensd, dan geldt dat voor elke $n \in \mathbb{N}$ de verzameling
   $$A_n = \{x \in A \mid |f(x)| \geq n\} \neq \emptyset.$$
   Kies een rij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A met $a_n \in A_n$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Omdat A rijcompact is, heeft deze rij een convergente deelrij $(a_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ met $\lim_{j\to\infty} a_{n_j} = x_0 \in A$. Omdat f continu is, volgt dat $(f(a_{n_j}))_{j\in\mathbb{N}}$ convergent is met $\lim_{j\to\infty} f(a_{n_j}) = f(x_0)$. Dan is $(f(a_{n_j}))_{j\in\mathbb{N}}$ begrensd, en anderzijds
   $$|f(a_{n_j})| \geq n_j \geq j.$$
   Dus we hebben een tegenspraak, en f is begrensd.

4. (i) Omdat f injectief, geldt $f(a) \neq f(b)$. We nemen aan dat $f(a) < f(b)$ en we bewijzen dat f strikt stijgend is. Het geval $f(a) > f(b)$ gaat net zo, of pas het voorgaande toe op $-f$ in plaats van f.

   Stel $a \leq x < y \leq b$. We moeten bewijzen dat $f(x) < f(y)$, en het bewijs gaat vanuit het ongerijmde. Stel $f(x) \geq f(y)$, dan is de verzameling

   $$E = \{c \in [a, b] \mid f(c) \geq f(y)\}$$

   niet-leeg, want $x \in E$ (of $y \in E$). E is begrensd, en dus bestaat $z = \inf E$. Merk op dat $z \leq x < y$.

   Geval: $a < z$ Dan bewijzen we als in de tussenwaardestelling dat $f(z) = f(y)$, en dan hebben we een tegenspraak met de injectiviteit omdat $z < y$.

   Inderdaad, $z + \frac{1}{n}$ is geen ondergrens, dus er is $c_n \in E$ met $z \leq c_n < z + \frac{1}{n}$. Dus $\lim_{n\to\infty} c_n = z$ en vanwege continuïteit $f(z) = \lim_{n\to\infty} f(c_n) \geq f(y)$. Anderzijds, $(z - \frac{1}{n})_{n=N}^{\infty}$ is een rij in $[a, b]$ voor zekere N want $z > a$, en dus $f(z) = \lim_{n\to\infty} f(z - \frac{1}{n}) \leq f(y)$.

   Geval: $a = z$ Dan $f(a) = f(z) \geq f(y)$. Als $f(a) = f(y)$ dan hebben we een tegenspraak met de injectiviteit, want $a < y$. Als $f(a) > f(y)$, dan is $f(a) \in (f(y), f(b))$. Dan geeft de tussenwaardestelling toegepast of $f \colon [y, b] \to \mathbb{R}$ dat er een $c \in [y, b]$ is met $f(a) = f(c)$, in tegenspraak met de injectiviteit.

   Kortom, beide gevallen leiden tot een tegenspraak. Dus $f(x) < f(y)$.

   (ii) Neem bijvoorbeeld $f \colon [0, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ voor $x \in [0, 1)$ en $f(x) = 3 - x$ voor $x \in [1, 2]$. Dan is f injectief (maak schets grafiek of bekijk een element uit het bereik $[0, 2]$), maar strikt stijgend op $[0, 1)$ en stikt dalend op $[1, 2]$. Maar f is niet continu.

5. Correct antwoord: D

6. Correct antwoord: B