Radboud Universiteit

Tussentoets Analyse 1 WP001B
14 januari 2021, 12:45–14:45

Het gebruik van een rekenmachine/GR, telefoon, syllabus, boek, aantekeningen e.d. is **niet toegestaan**. Geef precieze argumenten en antwoorden. Zorg dat uw redeneringen en schrijfstijl helder en beknopt zijn. Noteer op **elk vel** uw naam en studentnummer.

---

1. (i) Wat is de definitie van een convergente rij? Noem de rij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   (ii) Zij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ twee convergente rijen van reële getalllen. Bewijs dat de somrij $(a_n+b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent is, en bepaal de limiet.

   (iii) Veronderstel dat de rij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een convergente rij is, en dat de rij $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent is. Laat zien dat de rij $(b_n-a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent is.

2. (i) Wanneer heet de verzameling $A\subset\mathbb{R}$ rijcompact?

   (ii) Formuleer de stelling van Heine-Borel. (U hoeft het bewijs niet te geven.)

3. (i) Zij $A\subset\mathbb{R}$, en $f\colon A\to\mathbb{R}$ is een functie. Wanneer heet f uniform continu?

   (ii) Voor elke $n\in\mathbb{N}$ is $f_n\colon A\to\mathbb{R}$ een uniform continue functie. Het is gegeven dat $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ in de uniforme convergentie. Bewijs dat de limietfunctie $f\colon A\to\mathbb{R}$ uniform continu is.

4. Zij $I\subset\mathbb{R}$ een interval, en $f\colon I\to\mathbb{R}$. Dan heet f een convexe functie als voor alle $a,b\in I$ en voor alle $t\in[0,1]$ geldt dat

$$f\big((1-t)a+tb\big)\le(1-t)f(a)+tf(b).$$

   (i) Veronderstel dat $f\colon I\to\mathbb{R}$ en $g\colon I\to\mathbb{R}$ twee convexe functies zijn op het interval I. Bewijs dat $f+g\colon I\to\mathbb{R}$ een convexe functie is.

   (ii) Zij I een vast gekozen interval, en zij $V=\{f\colon I\to\mathbb{R}\mid f \text{ convexe functie}\}$ de ruimte van alle convexe functies op I. Is V een (reële) vectorruimte?

   (iii) Zij $\mathcal{F}$ een (niet-lege) verzameling van convexe functies $f\colon I\to\mathbb{R}$ op een vast gekozen interval I. Veronderstel dat voor elke $x\in I$ de verzameling $\{f(x)\mid f\in\mathcal{F}\}$ van boven begrensd is. Voor $x\in I$ definieer $g(x)=\sup\{f(x)\mid f\in\mathcal{F}\}$. Laat zien dat $g\colon I\to\mathbb{R}$ een convexe functie is.

   (iv) We nemen nu aan dat in (iii) geldt dat voor elke $x\in I$ de verzameling $\{f(x)\mid f\in\mathcal{F}\}$ van onderen begrensd is. Is $h\colon I\to\mathbb{R}$ gedefinieerd door $h(x)=\inf\{f(x)\mid f\in\mathcal{F}\}$ een convexe functie?

ZOZ! De tussentoets gaat verder op de achterkant!

Beantwoord de volgende twee meerkeuzevragen op dit vel door een kruis in het betreffende vak van het goede antwoord te plaatsen, en lever het in. In geval van onduidelijkheid bij het nakijken over welk vakje is aangekruist, zal het worden gerekend als *niet beantwoord*. Er zijn 6 punten per goed antwoord, 0 punten voor een niet gegeven antwoord en -2 punt (aftrek!) voor een fout antwoord.

Naam: ______________________

Studentnummer: ______________________

5. Gegeven is dat $A_\alpha \subset \mathbb{R}$ een open verzameling is voor elke $\alpha \in I$ voor een willekeurige indexverzameling I. Beschouw de volgende twee uitspraken:

   (a) $\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$ is een open verzameling

   (b) $\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha^c$ is een gesloten verzameling.

   Dan geldt:

A (a) en (b) zijn waar	B (a) is waar en (b) is niet waar
C (a) en (b) zijn niet waar	D (a) is niet waar en (b) is waar

Uw antwoord:

A	**B**	**C**	**D**

6. Welke van de volgende uitspraken is waar:

   A Zij $A \subset \mathbb{R}$ en $f\colon A \to \mathbb{R}$ een continue functie, dan is f uniform continu.

   B Zij $a < b$ en $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ een functie, dan neemt f elke waarde tussen $f(a)$ en $f(b)$ aan.

   C Zij $I \subset \mathbb{R}$ een interval, en $f\colon I \to \mathbb{R}$ een continue functie, dan bestaat er een $M > 0$ zodanig dat voor alle $x, y \in I$ geldt dat $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$.

   D Stel de functie $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ is continu en dat $f(0) = 1$ en $f(1) = 0$, dan bestaat er een $x \in (0,1)$ met $f(x) = x$.

Uw antwoord:

A	**B**	**C**	**D**

Normering								
Opgave	1	2	3	4	5	6	Gratis	Totaal
Punten	20	10	20	30	6	6	8	100

Toelichting en summiere uitwerkingen.

De verwijzingen zijn naar de syllabus van oktober 2020 (zie Brightspace).

1. (i) Definition 3.2.1.

   (ii) Theorem 3.2.19(ii).

   (iii) Als $(b_n - a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent is, dan volgt uit (ii) dat ook de rij $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent is (vanwege $b_n = a_n + (b_n - a_n)$ en $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent). Dat is in tegenspraak met de divergentie van de rij $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dus is $(b_n - a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent.

2. (i) Definition 4.3.1.

   (ii) Theorem 4.3.3.

3. (i) Definition 5.3.1.

   (ii) We moeten laten zien dat

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \qquad \forall x, y \in A \ |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

   We volgen het bewijs van Theorem 5.4.4. Dus kies $\varepsilon > 0$ willekeurig, en schrijf

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)|.$$

   Omdat de convergentie $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ uniform is bestaat er een $N \in \mathbb{N}$ zodat voor alle $n \geq N$ geldt dat voor alle $x \in A$ dat $|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{3}\varepsilon$. Dus, kies $n = N$, geldt

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{2}{3}\varepsilon + |f_N(x) - f_N(y)|.$$

   Omdat f_N een uniform continue functie is, volgt dat $\exists\delta > 0$ zodaing dat voor alle $x, y \in A$ geldt dat $|f_N(x) - f_N(y)| < \frac{1}{3}\varepsilon$. Voor deze $\delta > 0$ geldt dat voor alle $x, y \in A$ met $|x - y| < \delta$ ook

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{2}{3}\varepsilon + \frac{1}{3}\varepsilon = \varepsilon.$$

   Dus f is uniform continu.

4. (i) Merk op dat voor alle $a, b \in I$ en $t \in [0, 1]$

$$\begin{gathered}(f+g)\big((1-t)a + tb\big) = f\big((1-t)a + tb\big) + g\big((1-t)a + tb\big) \\ \leq (1-t)f(a) + tf(b) + (1-t)g(a) + tg(b) = (1-t)(f(a) + g(a)) + t(f(a) + g(a)) \\ = (1-t)(f+g)(a) + t(f+g)(a)\end{gathered}$$

   want f en g zijn convex.

   (ii) Nee, want als f convex is, dan is $-f$ concaaf (en niet convex). Bv $f(x) = x^2$ op $I = [-1, 1]$.

(iii) Stel $a, b \in I$, $t \in [0,1]$, en kies $\varepsilon > 0$ willekeurig, dan bestaat er een $f \in \mathcal{F}$ met

$$g\big((1-t)a + tb\big) - \varepsilon < f\big((1-t)a + tb\big) \leq (1-t)f(a) + tf(b) \leq (1-t)g(a) + tg(b)$$

en omdat dit geldt voor $\varepsilon > 0$ willekeurig volgt

$$g\big((1-t)a + tb\big) \leq (1-t)g(a) + tg(b).$$

(iv) Nee, dan met de definitie van inf staan de ongelijkheden verkeerd. Voorbeeld, neem $I = [-1, 1]$ en $f_1(x) = (x - \frac{1}{2})^2$, $f_2(x) = (x + \frac{1}{2})^2$, dan is $h(x) = \min(f_1(x), f_2(x))$ gelijk aan

$$h(x) = \begin{cases} (x - \frac{1}{2})^2 & x \geq 0 \\ (x + \frac{1}{2})^2 & x \leq 0 \end{cases}$$

en deze is niet convex (maak een schets van de grafiek van h). NB h is ook niet concaaf.

5. A

6. D