Radboud Universiteit

Tentamen Analyse 1 WP001B
25 maart 2021, 8:30–11:30

Het gebruik van een rekenmachine/GR, telefoon, syllabus, boek, aantekeningen e.d. is **niet toegestaan**. Geef precieze argumenten en antwoorden. Zorg dat uw redeneringen en schrijfstijl helder en beknopt zijn. Noteer op **elk vel** uw naam en studentnummer.

---

1. (i) Geef de definitie van een Cauchyrij. Noem de rij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (ii) Bewijs dat een Cauchyrij een begrensde rij is.
   (iii) Bewijs dat een Cauchyrij een convergente deelrij heeft.
   (iv) Bewijs dat een Cauchyrij met een convergente deelrij een convergente rij is.

2. (i) Laat $A \subset \mathbb{R}$ een verzameling zijn. Wanneer heet A een rijcompacte verzameling?
   (ii) Laat zien dat een rijcompacte verzameling zowel gesloten als begrensd is.
   (iii) Zij $f\colon B \to \mathbb{R}$ een functie. Wanneer heet f een continue functie?
   (iv) Zij $f\colon B \to \mathbb{R}$ een continue functie en veronderstel dat $A \subset B$ een rijcompacte verzameling is. Bewijs dat de beeldverzameling $f(A)$ rijcompact is.

3. (i) Stel $a < b$ en $I = [a, b]$, en veronderstel dat $f\colon I \to \mathbb{R}$ een continue functie is. Bewijs dat er een $c \in (a, b)$ bestaat met

$$\int_I f(x)\,dx = f(c)\,(b-a).$$

   (ii) Is de uitspraak bij (i) nog waar als we de eis van continuïteit laten vallen? Beargumenteer uw antwoord. Geef een bewijs of tegenvoorbeeld.

4. Veronderstel dat I een begrensd interval is, en dat voor elke $n \in \mathbb{N}$ de functie $f_n\colon I \to \mathbb{R}$ Riemannintegreerbaar is. Veronderstel bovendien dat $\forall\, n \in \mathbb{N}\ \exists\, M_n \geq 0$ zodanig dat

$$|f_n(x)| \leq M_n, \qquad \forall\, x \in I.$$

Neem aan dat $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ convergent is. Laat zien dat de reeks $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ een Riemannintegreerbare functie $f\colon I \to \mathbb{R}$ geeft en dat

$$\int_I f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_I f_n(x)\,dx.$$

ZOZ! Het tentamen gaat verder op de achterkant!

5. Zij $a < b$ en laat $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ een functie zijn met afgeleides tot en met orde $n+1$ (voor $n \in \mathbb{N}$), en neem aan dat $f^{(n+1)}$ een continue functie is.

   (i) Geef de definitie van het n-de graads Taylorpolynoom van f rond het punt $c \in (a,b)$.

   (ii) Geef een uitdrukking voor de fout $E_n(x) = f(x) - T_n(x)$. (NB. Het is voldoende om één juiste uitdrukking voor de fout $E_n(x)$ te formuleren. Een eventueel door u gegeven bewijs van deze uitdrukking zal als bonus meegenomen worden.)

   (iii) Veronderstel dat we f kunnen schrijven als

   $$f(x) = P(x) + (x-c)^n g(x)$$

   voor alle $x \in (a,b)$ met P een polynoom van graad n en $g\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ een functie met afgeleides tot en met orde $n+1$ zodanig dat $g^{(n+1)}$ continu is. Veronderstel bovendien dat $g(c) = 0$. Bewijs dat $P = T_n$.

6. [1] Stel $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ is een rij met $a_k \neq -1$ voor alle $k \in \mathbb{N}$. Definieer de rij $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als het partiële product

   $$p_n = \prod_{k=0}^{n}(1+a_k) = (1+a_0)(1+a_1)\cdots(1+a_n).$$

   Dan is het oneindige product $\prod_{k=0}^{\infty}(1+a_k)$ *convergent* als de rij $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent is met limiet $\lim_{n\to\infty} p_n = p \neq 0$. Als $p = 0$ of als $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ geen convergente rij is, dan heet het oneindige product $\prod_{k=0}^{\infty}(1+a_k)$ *divergent*.

   (i) Veronderstel $\prod_{k=0}^{\infty}(1+a_k)$ convergent is. Bewijs dat $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

   (ii) Veronderstel dat $a_k > -1$ voor alle $k \in \mathbb{N}$. Bewijs dat $\prod_{k=0}^{\infty}(1+a_k)$ convergent is dan en slechts dan als $\sum_{k=0}^{\infty} \ln(1+a_k)$ convergent is.

   (iii) Veronderstel dat $a_k \geq 0$ voor alle $k \in \mathbb{N}$. Bewijs dat $\prod_{k=0}^{\infty}(1+a_k)$ convergent is dan en slechts dan als $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ convergent is. Hint: gebruik $1 + x \leq \exp(x)$

Normering								
Opgave	1	2	3	4	5	6	Gratis	Totaal
Punten	15	15	10	10	15	15	10	100

[1] Als uw resultaat R van de tussentoets voldoet aan $R \geq 5.0$, dan krijgt u voor deze opgave het maximum van $1,5R$ en het aantal punten in de beoordeling van deze opgave.

Toelichting en summiere uitwerkingen.

De verwijzingen zijn naar de syllabus van maart 2021 (zie Brightspace).

1. (i) Def. 3.3.1.

   (ii) Exercise 3.3.3. Kies $\varepsilon = 1$, dan

   $$\exists \mathbb{N} \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \geq N \qquad |a_n - a_m| < 1.$$

   Dus $|a_n| \leq |a_N| + 1$ voor alle $n \geq N$, en stel $M = \max(\max_{0 \leq n \leq N-1} |a_n|, |a_N| + 1)$ dan geldt $|a_n| \leq M$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

   (iii) Stelling van Bolzano-Weierstrass Theorem 3.2.12.

   (iv) Stel $(a_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$ is een convergente deelrij van de Cauchyrij, en stel $\lim_{j \to \infty} a_{n_j} = L$. We bewijzen dat $\lim_{n \to \infty} a_n = L$.

   Kies $\varepsilon > 0$ willekeurig, dan bestaat er een $J \in \mathbb{N}$ zodanig dat voor alle $j \geq J$ geldt $|a_{n_j} - L| < \frac{1}{2}\varepsilon$ (omdat de deelrij convergent is) en er bestaat $N \in \mathbb{N}$ zodanig dat voor alle $m, n \geq N$ geldt $|a_n - a_m| < \frac{1}{2}\varepsilon$ (omdat het een Cauchyrij is). Dus voor $M = \max(n_J, N)$ kies een element $n_{j_0} \in \mathbb{N}$ met $n_{j_0} \geq M$ dan in het bijzonder $j_0 > J$ en dus voor alle $n \geq M$ geldt

   $$|a_n - L| \leq |a_n - a_{n_{j_0}}| + |a_{n_{j_0}} - L| < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon.$$

2. (i) Def. 4.3.1.

   (ii) Een implicatie van de Heine-Borel stelling, Theorem 4.3.3 (en Exercise 4.3.2).

   (iii) Def. 5.1.8.

   (iv) Stel $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ is een willekeurige rij in $f(A)$. Kies inverse beelden; $x_n \in A$ met $f(x_n) = y_n$. Dan is $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ een rij in de rijcompacte verzameling A, en deze heeft dus een convergente deelrij $(x_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$ met $\lim_{j \to \infty} x_{n_j} = x \in A$. Omdat f continu is op B en dus op A, en dan zet f convergente rijen naar convergente rijen om. Dus $(f(x_{n_j}))_{j \in \mathbb{N}}$ is een convergente rij in $f(A)$ met $\lim_{j \to \infty} f(x_{n_j}) = f(x) \in f(A)$. Dus $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ heeft een convergente deelrij $(y_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$ met limiet $f(x) \in f(A)$. Dus $f(A)$ is rijcompact.

3. (a) Stel $F(x) = \int_{[a,x]} f(t)\, dt$ dan is F differentieerbaar volgens de Hoofdstelling van de Integraalrekening. Pas dan Middelwaardestelling toe op F, dat geeft dat $\exists\, c \in (a, b)$ met

   $$\frac{F(b) - F(a)}{b - a} = F'(c)$$

   en vul in $F(b) = \int_I f(x)\, dx$, $F(a) = 0$ en $F'(c) = f(c)$ (weer de Hoofdstelling van de Integraalrekening).

(b) Nee, neem $I = [0, 1]$,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, \frac{1}{2}) \\ -1, & x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}.$$

Dan is $\int_{[0,1]} f(x)\, dx = 0$, maar $f(x) \neq 0 \; \forall\, x \in [0, 1]$.

4. Met behulp van de Weierstrass M-test, Theorem 8.3.2, volgt dat f de uniforme limiet is van de functies $S_N = \sum_{n=0}^{N} f_n$. Merk op dat S_N Riemannintegreerbaar is voor elke N. Omdat f de uniforme limiet is van Riemannintegreerbare functies, volgt dat f Riemannintegreerbaar is en dat

$$\int_I f(x)\, dx = \lim_{N\to\infty} \int_I S_N(x)\, dx = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \int_I f_n(x)\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_I f_n(x)\, dx$$

door gebruik te maken van Theorem 7.5.1. (Merk op dat

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \int_I f_n(x)\, dx \right| \leq |I| \sum_{n=0}^{\infty} M_n$$

en dus absoluut convergent is, maar dit is niet nodig.)

5. (i) Def. 6.4.1.

(ii) Een van de uitdrukkingen voor de fout als in Theorem 6.4.2, of als in Corollary 7.4.7. Zie daar ook voor een bewijs.

(iii) Merk op dat de k-de afgeleide van f dan gelijk is aan

$$f^{(k)}(x) = P^{(k)}(x) + \frac{d^k}{dx^k}\Big((x-c)^n g(x)\Big) =$$
$$P^{(k)}(x) + \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} k(k-1)\cdots(k-r+1)\, g^{(r-k)}(x)\, (x-c)^{n-r}$$

en dit voor $k \in \{0, 1, \cdots, n\}$. Dan volgt dat $f^{(k)}(c) = P^{(k)}(c)$ voor $k < n$ omdat er altijd een positieve macht van $(x-c)$ in elk van de sommanden staat, en voor $k = n$ krijgen we

$$f^{(n)}(c) = P^{(n)}(c) + \binom{n}{n} n!\, g(c) = P^{(n)}(c).$$

Merk op dat voor ieder polynoom P van graad n en voor iedere $c \in \mathbb{R}$ geldt

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k$$

(Taylorbenadering voor dit polynoom is exact), en dus met (i) volgt dat $P = T_n$.

6. (i) Schrijf $(1+a_k) = \frac{p_k}{p_{k-1}}$ en neem de limiet $k \to \infty$. Omdat de limiet niet nul is, volgt

$$\lim_{k\to\infty} 1 + a_k = \lim_{k\to\infty} \frac{p_k}{p_{k-1}} = \frac{p}{p} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{k\to\infty} a_k = 0.$$

(ii) Merk op dat $1 + a_k > 0$, en dus $p_n > 0$. Schrijf $\ln(p_n) = \sum_{k=0}^{n} \ln(1 + a_k)$.
Veronderstel het oneindige produkt is convergent, dan, omdat ln continu is op $(0, \infty)$ en $p > 0$, volgt

$$\ln(p) = \lim_{n\to\infty} \ln(p_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \ln(1 + a_k)$$

ofwel $\sum_{k=0}^{\infty} \ln(1 + a_k)$ is convergent.
Ongekeerd, als $\sum_{k=0}^{\infty} \ln(1 + a_k)$ is convergent, dan bestaat $L = \lim_{n\to\infty} \ln(p_n)$, en pas de continue functie exp toe. Dan

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} \exp(\ln(p_n)) = \exp(L) \neq 0.$$

En dus is het oneindige product convergent.

(iii) Merk op dat als $a_k \geq 0$ voor alle k, dan geldt dat $p_{n+1} \geq p_n \geq 1$. Om dezelfde reden is $S_{N+1} \geq S_N$ met $S_n = \sum_{k=0}^{N} a_k$ de partiële som. Omdat het beide stijgende rijen zijn, is het voldoende om te bewijzen dat

$$(S_N)_{N\in\mathbb{N}} \text{ begrensd} \quad \Longleftrightarrow \quad (p_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ begrensd}$$

Merk op dat $1 + S_N \leq p_N$ want

$$1 + a_0 + \cdots + a_N \leq (1 + a_0)(1 + a_1) \cdots (1 + a_N)$$

want als je het rechterlid uitwerkt krijg je het linkerlid plus nog hogere produkten van de a_n's, en die zijn alle positief. Dus als $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ begrensd, dan is $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ begrensd.
Omgekeerd, gebruik de hint,

$$p_n = \prod_{k=0}^{n} (1 + a_k) \leq \prod_{k=0}^{n} \exp(a_k) = \exp(\sum_{k=0}^{n} a_k) = \exp(S_n)$$

dus als $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ begrensd, dan is $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ begrensd.