Radboud Universiteit

Tentamen Analyse 1 WP001B
7 juli 2021, 8:30–11:30

Het gebruik van een rekenmachine/GR, telefoon, syllabus, boek, aantekeningen e.d. is **niet toegestaan**. Geef precieze argumenten en antwoorden. Zorg dat uw redeneringen en schrijfstijl helder en beknopt zijn. Noteer op **elk vel** uw naam en studentnummer.

---

1. We beschouwen de reeks $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ met $a_n \in \mathbb{R}$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

   (i) Geef de definitie van een convergente reeks.

   (ii) Bewijs dat de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ convergent is dan en slechts dan als geldt

   $$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall k, l \in \mathbb{N} \text{ met } k \geq l \geq N: \qquad \Big|\sum_{n=l}^{k} a_n\Big| < \varepsilon.$$

   (U hoeft de gebruikte uitspraken over rijen niet te bewijzen, maar wel duidelijk te formuleren.)

   (iii) Geef de definitie van een absoluut convergente reeks.

   (iv) Gegeven een absoluut convergente reeks. Bewijs dat de reeks convergent is.

   (v) Veronderstel dat de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ convergent is. Geldt dat de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$ convergent is? Zo ja, geef een bewijs. Zo nee, geef een tegenvoorbeeld.

2. Zij $A \subset \mathbb{R}$ een niet-lege verzameling en beschouw de functies $f_n \colon A \to \mathbb{R}$ voor $n \in \mathbb{N}$.

   (i) Wanneer heet een functie $g \colon A \to \mathbb{R}$ uniform continu?

   (ii) Wanneer heet de rij $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uniform convergent naar een functie $f \colon A \to \mathbb{R}$?

   (iii) Veronderstel dat de rij $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uniform convergeert naar een functie $f \colon A \to \mathbb{R}$ en dat voor elke $n \in \mathbb{N}$ de functie $f_n \colon A \to \mathbb{R}$ uniform continu is. Bewijs dat de limietfunctie $f \colon A \to \mathbb{R}$ uniform continu is.

3. Zij $a < b$ en $I = [a, b]$, en stel $f \colon I \to \mathbb{R}$ een begrensde functie.

   (i) Wanneer heet f Riemannintegreerbaar over het interval I?

   (ii) Veronderstel dat $f \colon I \to \mathbb{R}$ en $g \colon I \to \mathbb{R}$ Riemannintegreerbaar zijn over het interval I. Bewijs dat $f + g$ Riemannintegreerbaar is over het interval I.

   (iii) Veronderstel dat f Riemannintegreerbaar is over I. Definieer $F \colon I \to \mathbb{R}$ door $F(x) = \int_{[a,x]} f(s)\,ds$. Veronderstel dat f continu is in $c \in I$. Laat zien dat F differentieerbaar is in c en bepaal $F'(c)$.

ZOZ! Het tentamen gaat verder op de achterkant!

4. Zij $f\colon A \to \mathbb{R}$ een functie waarvoor geldt

$$\forall\, x \in A \quad \exists\, \varepsilon > 0 \quad \forall\, y \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap A\colon \qquad f(y) > \varepsilon.$$

Veronderstel dat A compact is. Bewijs dat er een $c > 0$ bestaat met $\forall\, x \in A$ geldt $f(x) > c$.

5. Zij $n \in \mathbb{N}$ en $a < 0 < b$. Veronderstel dat $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ een functie is waarvoor alle afgeleides tot en met de $n+1$-de afgeleide bestaan zodanig dat $n+1$-eerste afgeleide $f^{(n+1)}\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ continu is.

   (i) Bewijs dat voor $x \in (a,b)$

   $$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{x^{n+1}}{n!} \int_0^1 f^{(n+1)}(xs)(1-s)^n \, ds.$$

   (ii) Neem $f(x) = \sin(x)$, en zij $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ het Taylorpolynoom rond 0. Bewijs dat op elk interval $[-M, M]$ de rij functies $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uniform naar de sinusfunctie convergeert. (Hint: schat elke afgeleide van de sinus met 1.)

6. [1] In deze opgave bewijst u dat elke niet-lege open verzameling $A \subset \mathbb{R}$ een aftelbare vereniging van disjuncte open intervallen is.

   (i) Zij I een indexverzameling, en veronderstel dat voor iedere $\alpha \in I$ de verzameling $A_\alpha \subset \mathbb{R}$ een open verzameling is. Bewijs dat $A = \cup_{\alpha\in I} A_\alpha$ een open verzameling is.

   (ii) Zij $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ een open verzameling. Definieer de collectie $\mathcal{D}$ van intervallen

   $$\mathcal{D} = \{ I = (a,b) \subset A \mid I \subset (c,d) \subset A \ \Rightarrow \ a = c \text{ en } b = d \}$$

   (a) Bewijs dat $\cup_{I\in\mathcal{D}} I \subset A$.
   (b) Bewijs dat $A \subset \cup_{I\in\mathcal{D}} I$.
   (c) Bewijs dat als $I, J \in \mathcal{D}$ met $I \neq J$, dan is $I \cap J = \emptyset$.
   (d) Bewijs dat de collectie $\mathcal{D}$ aftelbaar is.
   (e) Bewijs dat elke niet-lege open verzameling $A \subset \mathbb{R}$ een aftelbare vereniging van disjuncte open intervallen is.

Normering								
Opgave	1	2	3	4	5	6	Gratis	Totaal
Punten	15	15	20	10	15	15	10	100

[1] Als uw resultaat R van de tussentoets voldoet aan $R \geq 5.0$, dan krijgt u voor deze opgave het maximum van $1,5R$ en het aantal punten in de beoordeling van deze opgave.

Toelichting en summiere uitwerkingen.

De verwijzingen zijn naar de syllabus van maart 2021 (zie Brightspace).

1. (i) Definition 8.1.1.
   (ii) Theorem 8.1.9.
   (iii) Definition 8.1.10.
   (iv) Proposition 8.1.12.
   (v) Nee. Neem bv $a_n = (-1)^n \frac{1}{\sqrt[4]{n+1}}$, dan is de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ convergent aan de hand van de alternerende reeks test, maar $a_n^2 = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ geeft een divergente reeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$. NB: als de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *absoluut convergent* wordt verondersteld, dan is $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$ wel (absoluut) convergent.

2. (i) Definition 5.3.1.
   (ii) Definition 5.4.3.
   (iii) (Doe het bewijs van Theorem 5.4.4 na.) Schrijf

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)|$$

die geldt voor alle $a, y \in A$ en alle $n \in \mathbb{N}$. Kies $\varepsilon > 0$ willekeurig, dan bestaat er een N zodanig dat voor alle $n \geq N$ geldt dat

$$\forall\, x \in A \qquad |f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{3}\varepsilon.$$

Kies $n = N$, dan

$$|f(x)-f(y)| \leq |f(x)-f_N(x)|+|f_N(x)-f_N(y)|+|f_N(y)-f(y)| < \frac{2}{3}\varepsilon+|f_N(x)-f_N(y)|$$

Omdat f_N uniform continu is, bestaat er een $\delta > 0$ zodanig dat voor alle $x, y \in A$ met $|x - y| < \delta$ volgt dat $|f_N(x) - f_N(y)| < \frac{1}{3}\varepsilon$. Dus het volgt dat er een $\delta > 0$ bestaat zodanig dat voor alle $x, y \in A$ met $|x - y| < \delta$ we hebben $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Dus f is uniform continu.

3. (i) Definition 7.2.5.
   (ii) Theorem 7.3.1, een deel van (i).
   (iii) Theorem 7.4.1, onderdeel (ii).

4. Veronderstel dat zo'n c niet bestaat. Ofwel voor elke $c > 0$ bestaat er een $x \in A$ met $f(x) \leq c$. Kies $c = \frac{1}{n}$ met $n \geq 1$ en $n \in \mathbb{N}$, en een bijbehorende $x_n \in A$ met $f(x_n) \leq \frac{1}{n}$.

Dit geeft een rij $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ in A. Omdat A compact is, en dus volgens Heine-Borel gesloten en begrensd volgt dat $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ een convergente deelrij $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ heeft met limiet in A;

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0 \in A.$$

Neem $\varepsilon > 0$ voor deze $x_0 \in A$, dan geldt voor k voldoende groot dat $x_{n_k} \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap A$, en dus $f(x_{n_k}) > \varepsilon$. Anderzijds $f(x_{n_k}) \leq \frac{1}{n_k} \leq \frac{1}{k}$ want het is een deelrij. Voor k groot volgt dan $\frac{1}{k} < \varepsilon$ en dus vinden we een tegenspraak.

Als je de (equivalente) definitie van compactheid (zoals in Exercise 4.4.8) gebruikt. Dan stel $\varepsilon = \varepsilon_x$, en dan is

$$A \subset \bigcup_{x\in A} (x - \varepsilon_x, x + \varepsilon_x)$$

een overdekking door open verzamelingen. Omdat A compact is er een eindige deeloverdekking, dus er bestaan $x_1, \cdots, x_N \in A$

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{N} (x_i - \varepsilon_{x_i}, x_i + \varepsilon_{x_i}).$$

Stel nu $c = \min_{1\leq i\leq N} \varepsilon_{x_i} > 0$, dan geldt $f(x) > \varepsilon_{x_i} \geq c$ voor $x \in (x_i - \varepsilon_{x_i}, x_i + \varepsilon_{x_i})$ voor elke $i \in \{1, \cdots, N\}$. Dus $f(x) > c$ voor alle $x \in A$.

5. (i) We bewijzen het met behulp van inductie op n. Het geval $n = 0$ geeft

$$f(x) = f(0) + x \int_0^1 f'(xs)\, ds$$

en dit klopt vanwege de hoofdstelling van de integraalrekening. Merk op dat f' is continu, en dus Riemannintegreerbaar. Inderdaad, voor $x = 0$ is het triviaal waar en voor $x \neq 0$ volgt

$$\int_0^1 f'(xs)\, ds = \frac{1}{x} f(xs)|_{s=0}^{1} = \frac{f(x) - f(0)}{x}.$$

Voor de inductiestap nemen we het geval n aan, en dat f afgeleides heeft tot en met orde $(n + 2)$, en dat $f^{(n+2)}$ continu is. Gegeven de uitspraak voor n (waar verondersteld) en die voor $n + 1$, zien we dat de uitspraak voor $n + 1$ waar dan en slechts dan als (neem het verschil van beide uitspraken)

$$0 = \frac{x^{n+1}}{n!} \int_0^1 f^{(n+1)}(xs)(1-s)^n\, ds - \frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!} x^{n+1} - \frac{x^{n+2}}{(n+1)!} \int_0^1 f^{(n+2)}(xs)(1-s)^{n+1}\, ds.$$

Dit bewijzen door partieel te integreren (merk op dat alle functies continu zijn, en dus Riemannintegreerbaar):

$$\frac{x^{n+1}}{n!}\int_0^1 \underbrace{f^{(n+1)}(xs)}_{F(s)}\underbrace{(1-s)^n}_{G'(s)}\,ds = \frac{x^{n+1}}{n!}\left(f^{(n+1)}(xs)\frac{-(1-s)^{n+1}}{n+1}\right)\Big|_{s=0}^1$$
$$-\frac{x^{n+1}}{n!}\int_0^1 \underbrace{xf^{(n+2)}(xs)}_{F'(s)}\underbrace{\frac{-(1-s)^{n+1}}{n+1}}_{G(s)}\,ds$$

en herschrijven geeft het gewenste resultaat.

NB: Je kunt ook Corollary 7.4.7 aanroepen en in de betreffende integraal een substitutie toepassen.

(ii) Als $f(x) = \sin(x)$, dan zijn de afgeleides $f^{(2k)}(x) = (-1)^k \sin(x)$ en $f^{(2k+1)}(x) = (-1)^k \cos(x)$, en dus $|f^{(n)}(x)| \leq 1$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Dus in het bijzonder geldt voor $|x| \leq M$

$$|f(x) - T_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{n!}\int_0^1 (1-s)^n\,ds = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{M^{n+1}}{(n+1)!}$$

en omdat $\lim_{n\to\infty}\frac{M^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ volgt dat de convergentie uniform is op $[-M, M]$.

6. (i) Proposition 4.1.4(iv).

(ii) Merk op dat als $I \in \mathcal{D}$ en J is een open interval met $I \subset J \subset A$, dan is $I = J$. Ofwel, $\mathcal{D}$ is de collectie van maximale open intervallen bevat in A.

(a) Aangezien voor iedere $I \in \mathcal{D}$ geldt dat $I \subset A$, volgt dat $\cup_{I\in\mathcal{D}} I \subset A$. Terzijde, uit (i) volgt $\cup_{I\in\mathcal{D}} I$ open is.

(b) Kies $a \in A$. Omdat A open is, is a een inwendig punt en dus bestaat er een $\varepsilon > 0$ met $N_\varepsilon(a) = (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset A$. Breid dit interval $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset I \subset A$ uit tot $I \in \mathcal{D}$. Dan $a \in I \subset \cup_{I\in\mathcal{D}} I$. Ofwel, $A \subset \cup_{I\in\mathcal{D}} I$.

(c) Als $I, J \in \mathcal{D}$ en $I \neq J$ maar $I \cap J \neq \emptyset$, dan is ook $I \cup J$ een open interval dat bevat is in A. Omdat $I \subset I \cup J$, maar $I \neq I \cup J$ voldoet I niet aan de eis in de definitie van $\mathcal{D}$. Dus tegenspraak en $I \cap J = \emptyset$.

(d) Kies een functie $r\colon \mathcal{D} \to \mathbb{Q}$ met $r(I) \in \mathbb{Q} \cap I$. Dit kan, want elk open interval bevat rationale getallen. Omdat $\mathcal{D}$ bestaat uit disjunte open intervallen, is elke r injectief. Omdat $\mathbb{Q}$ aftelbaar is, volgt dat $\mathcal{D}$ aftelbaar is.

(e) Dit volgt direkt uit (a)-(d), omdat (a) en (b) geven dat $A = \cup_{I\in\mathcal{D}} I$ en $\mathcal{D}$ is aftelbare collectie van disjuncte open intervallen vanwege (c) en (d).