Radboud Universiteit

Digitaal Tentamen Analyse 1 WP001B, VERSIE 3
2 april 2020, 08:30–11:30

U mag gebruik maken van uw boek, uw aantekeningen, etc, voor dit tentamen. U wordt geacht het tentamen zelfstandig te maken. Geef precieze argumenten en antwoorden. Zorg dat uw redeneringen en schrijfstijl helder en beknopt zijn. Noteer op **elk vel** uw NAAM, STUDENTNUMMER, en VERSIE 3. U moet uw uitwerkingen uploaden in Brightspace als pdf!

---

1. Gegeven functies $f\colon I \to \mathbb{R}$, $g\colon J \to \mathbb{R}$ zodanig dat I, J open intervallen zijn en f en g zijn strikt stijgende continue functies. Veronderstel dat $f(I) \subset J$. Veronderstel dat f differentieerbaar is in $a \in I$ met $f'(a) > 0$ en dat g differentieerbaar is in $f(a)$ met $g'(f(a)) > 0$. Bewijs dat de samenstelling $f^{-1} \circ g^{-1}$ differentieerbaar is in $g(f(a))$ en bepaal deze afgeleide expliciet in termen van de functies f en g.

2. Veronderstel dat de reeks $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absoluut convergent is, en dat $a_n \neq 1$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

   Is de reeks $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{|a_n|^2}}{1-a_n^2}$ absoluut convergent? Beargumenteer uw antwoord.

3. Gegeven is dat de functie $f\colon A \to \mathbb{R}$ uniform continu is.

   (i) Kies een Cauchyrij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A. Bewijs dat de beeldrij $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ een Cauchyrij is.

   (ii) Definieer nu $\overline{f}\colon \overline{A} \to \mathbb{R}$ door voor $x \in \overline{A}$ een rij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A te kiezen zodanig dat $\lim_{n\to\infty} a_n = x$. Laat zien dat $\overline{f}(x) = \lim_{n\to\infty} f(a_n)$ goed gedefinieerd is, dat wil zeggen dat de limiet onafhankelijk is van de keuze van de rij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A die convergeert naar $x \in \overline{A}$.

   (iii) Bewijs dat $\overline{f}\colon \overline{A} \to \mathbb{R}$ continu is.

   (iv) Bewijs dat $\overline{f}\colon \overline{A} \to \mathbb{R}$ uniform continu is.

4. Veronderstel dat $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ continu is, met $f(0) = f(1)$. Bewijs dat er een $x \in [0, \frac{1}{2}]$ bestaat met $f(x) = f(x + \frac{1}{2})$.

ZOZ! Het tentamen gaat verder op de achterkant!

5. Zij $f\colon A \to \mathbb{R}$ een functie op de verzameling $A \subset \mathbb{R}$. We veronderstellen dat A geen geïsoleerde punten heeft en dat f begrensd is.

   (i) Veronderstel dat $a \in \overline{A}$. Definieer $m\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ door middel van

   $$m(\delta) = \inf_{x \in N_\delta^*(a) \cap A} f(x), \qquad N_\delta^*(a) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < |x-a| < \delta\}$$

   Bewijs dat $\lim\limits_{\delta \to 0, \delta > 0} m(\delta)$ bestaat. We definiëren

   $$\liminf_{x \to a, x \in A} f(x) = \lim_{\delta \to 0, \delta > 0} m(\delta)$$

   (ii) Bewijs dat de uitspraken (a) en (b) equivalent zijn:

   (a) $L = \liminf_{x \to a, x \in A} f(x)$

   (b) de volgende eigenschappen gelden

   - er bestaat een rij $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ met $a_n \in A$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ en $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ en $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = L$
   - voor elke $r < L$ bestaat er een $\delta > 0$ zodanig dat $f(x) > r$ voor alle $x \in N_\delta^*(a) \cap A$

   (iii) Veronderstel nu dat A een gesloten interval is. Laat zien dat de volgende uitspraken (a) en (b) equivalent zijn:

   (a) voor elke $a \in A$ geldt $\liminf_{x \to a, x \in A} f(x) \geq f(a)$.

   (b) voor alle $r \in \mathbb{R}$ is $\{x \in A \mid f(x) > r\}$ is open (relatief ten opzichte van A)

De bonusregeling ten aanzien van de verwerking van uw resultaten voor het huiswerk en tussentoets, zoals vermeld in de studiewijzer, geldt voor dit tentamen.
