Radboud Universiteit

Digitaal Tentamen Analyse 1 WP001B, VERSIE 2
2 april 2020, 08:30–11:30

U mag gebruik maken van uw boek, uw aantekeningen, etc, voor dit tentamen. U wordt geacht het tentamen zelfstandig te maken. Geef precieze argumenten en antwoorden. Zorg dat uw redeneringen en schrijfstijl helder en beknopt zijn. Noteer op **elk vel** uw NAAM, STUDENTNUMMER, en VERSIE 2. U moet uw uitwerkingen uploaden in Brightspace als pdf!

---

1. We definiëren de notatie $\prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 a_2 \cdots a_n$. Bekijk nu voor een rij reële getallen $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ de getallen
$$p_n = \prod_{k=1}^{n} (1 + a_k)$$
waarbij we aannemen dat $a_k \neq -1$ voor alle k. Nu heet het oneindig product
$$\prod_{k=1}^{\infty} (1 + a_k)$$
convergent als $\lim_{n\to\infty} p_n = p$ bestaat en $p \neq 0$. In geval $\lim_{n\to\infty} p_n = 0$, dan zeggen we dat het product naar 0 divergeert.
   (i) Laat zien dat $\prod_{k=2}^{\infty}(1 - \frac{1}{k^2})$ convergent is en bepaal de limiet. (*Hint.* Herschrijf $1 - \frac{1}{k^2}$ zodat je het bijbehorende product als een 'telescopend' product kunt herkennen.)
   (ii) In het algemene geval geval bewijzen we de volgende uitspraak.
   Als $a_k \geq 0$ dan is het product $\prod_{k=1}^{\infty}(1+a_k)$ convergent dan en slechts dan als $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ convergent is.
      (a) Stel $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Laat zien dat $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ en $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ stijgende rijen zijn.
      (b) Laat zien dat $1 + s_n \leq p_n \leq e^{s_n}$. (*Hint.* Gebruik $1 + x \leq e^x$.)
      (c) Bewijs nu de uitspraak.

2. Veronderstel dat de reeks $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absoluut convergent is, en dat $a_n \neq 1$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.
Bewijs dat de reeks $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{1 - a_n^3}$ absoluut convergent is.

3. Gegeven een continue functie $f\colon [0,1] \to [0,1]$. Bewijs dat er een punt $x_0 \in [0,1]$ bestaat met $f(x_0) = \sin(\frac{1}{2}\pi x_0)$.

ZOZ! Het tentamen gaat verder op de achterkant!

4. Bereken het convolutieprodukt van de reeksen

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n = 1 - x + \cdots, \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n = 1 + \alpha x + \cdots$$

waarbij $\alpha \in \mathbb{R}$. Bepaal de convergentiestralen van alle reeksen. Bepaal de functie waarvoor de partiële sommen van het convolutieprodukt overeen komen met de Taylorpolynomen.

5. Zij $f\colon A \to \mathbb{R}$ een functie op de verzameling $A \subset \mathbb{R}$. We veronderstellen dat A geen geïsoleerde punten heeft en dat f begrensd is.

(i) Veronderstel dat $a \in \overline{A}$. Definieer $m\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ door middel van

$$m(\delta) = \inf_{x \in N_\delta^*(a)\cap A} f(x), \qquad N_\delta^*(a) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < |x-a| < \delta\}$$

Bewijs dat $\lim\limits_{\delta\to 0, \delta>0} m(\delta)$ bestaat. We definiëren

$$\liminf_{x\to a, x\in A} f(x) = \lim_{\delta\to 0,\delta>0} m(\delta)$$

(ii) Bewijs dat de uitspraken (a) en (b) equivalent zijn:

(a) $L = \liminf_{x\to a, x\in A} f(x)$

(b) de volgende eigenschappen gelden

- er bestaat een rij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ met $a_n \in A$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ en $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ en $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = L$
- voor elke $r < L$ bestaat er een $\delta > 0$ zodanig dat $f(x) > r$ voor alle $x \in N_\delta^*(a) \cap A$

(iii) Veronderstel nu dat A een gesloten interval is. Laat zien dat de volgende uitspraken (a) en (b) equivalent zijn:

(a) voor elke $a \in A$ geldt $\liminf_{x\to a, x\in A} f(x) \geq f(a)$.

(b) voor alle $r \in \mathbb{R}$ is $\{x \in A \mid f(x) \leq r\}$ is gesloten (relatief ten opzichte van A)

De bonusregeling ten aanzien van de verwerking van uw resultaten voor het huiswerk en tussentoets, zoals vermeld in de studiewijzer, geldt voor dit tentamen.
