Radboud Universiteit

Digitaal Tentamen Analyse 1 WP001B, VERSIE 1
2 april 2020, 08:30–11:30

U mag gebruik maken van uw boek, uw aantekeningen, etc, voor dit tentamen. U wordt geacht het tentamen zelfstandig te maken. Geef precieze argumenten en antwoorden. Zorg dat uw redeneringen en schrijfstijl helder en beknopt zijn. Noteer op **elk vel** uw NAAM, STUDENTNUMMER, en VERSIE 1. U moet uw uitwerkingen uploaden in Brightspace als pdf!

---

1. We bekijken de rij van gehele getallen gedefinieerd door $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ en

$$x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$$

en definieer $y_n = x_{n+1}/x_n$ voor $n \geq 1$.

   (i) Bewijs dat $x_{n+1}x_{n-1} - x_n^2 = (-1)^n$ voor $n \geq 1$.

   (ii) Laat zien dat de rij $(y_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ stijgend is.

   (iii) Laat zien dat de rij $(y_{2n+2})_{n\in\mathbb{N}}$ dalend is.

   (iv) Bewijs dat de rij $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ convergent is, en bepaal de limiet $\lim_{n\to\infty} y_n$.

2. Veronderstel dat de reeks $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absoluut convergent is, en dat $a_n \neq 1$, $a_n \neq -1$, $a_n \neq 0$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Bewijs dat de reeks $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n^2}{\sqrt{|a_n| - a_n^2}}$ absoluut convergent is.

3. Gegeven is een rij functies $f_n\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, en elke functie f_n is differentieerbaar, en de afgeleide $f_n'\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ is continu voor elke $n \in \mathbb{N}$. Hierbij nemen we de linker, respectievelijk de rechter, afgeleide in a, respectievelijk b.

   (i) Veronderstel dat $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ met puntsgewijze convergentie. Kunnen we concluderen dat f differentieerbaar is? Geef een bewijs of een tegenvoorbeeld.

   (ii) Veronderstel dat $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ met uniforme convergentie. Kunnen we concluderen dat f differentieerbaar is? Geef een bewijs of een tegenvoorbeeld.

   (iii) Veronderstel dat $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ met uniforme convergentie en dat $\lim_{n\to\infty} f_n' = g$ met uniforme convergentie. Kunnen we concluderen dat f differentieerbaar is met $f' = g$? Geef een bewijs of een tegenvoorbeeld.

4. Bewijs dat de doorsnede $A \cap B$ van de samenhangende verzamelingen $A \subset \mathbb{R}$ en $B \subset \mathbb{R}$ een samenhangende verzameling is.

ZOZ! Het tentamen gaat verder op de achterkant!

5. Zij $f\colon A \to \mathbb{R}$ een functie op de verzameling $A \subset \mathbb{R}$. We veronderstellen dat A geen geïsoleerde punten heeft en dat f begrensd is.

   (i) Veronderstel dat $a \in \overline{A}$. Definieer $m\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ door middel van

   $$m(\delta) = \sup_{x \in N^*_\delta(a) \cap A} f(x), \qquad N^*_\delta(a) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < |x-a| < \delta\}$$

   Bewijs dat $\lim\limits_{\delta \to 0, \delta > 0} m(\delta)$ bestaat. We definiëren

   $$\limsup_{x \to a, x \in A} f(x) = \lim_{\delta \to 0, \delta > 0} m(\delta)$$

   (ii) Bewijs dat de uitspraken (a) en (b) equivalent zijn:

   (a) $L = \limsup_{x \to a, x \in A} f(x)$

   (b) de volgende eigenschappen gelden

   - er bestaat een rij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ met $a_n \in A$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ en $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ en $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = L$
   - voor elke $r > L$ bestaat er een $\delta > 0$ zodanig dat $f(x) < r$ voor alle $x \in N^*_\delta(a) \cap A$

   (iii) Veronderstel nu dat A een gesloten interval is. Laat zien dat de volgende uitspraken (a) en (b) equivalent zijn:

   (a) voor elke $a \in A$ geldt $\limsup_{x \to a, x \in A} f(x) \leq f(a)$.

   (b) voor alle $r \in \mathbb{R}$ is $\{x \in A \mid f(x) < r\}$ is open (relatief ten opzichte van A)

De bonusregeling ten aanzien van de verwerking van uw resultaten voor het huiswerk en tussentoets, zoals vermeld in de studiewijzer, geldt voor dit tentamen.
