Radboud Universiteit

Digitaal Tentamen Analyse 1 WP001B, VERSIE 0
2 april 2020, 08:30–11:30

U mag gebruik maken van uw boek, uw aantekeningen, etc, voor dit tentamen. U wordt geacht het tentamen zelfstandig te maken. Geef precieze argumenten en antwoorden. Zorg dat uw redeneringen en schrijfstijl helder en beknopt zijn. Noteer op **elk vel** uw NAAM, STUDENTNUMMER, en VERSIE 0. U moet uw uitwerkingen uploaden in Brightspace als pdf!

---

1. Zij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een begrensde rij.

   (i) Laat zien dat elke convergente deelrij $(a_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ met $L = \lim_{j\to\infty} a_{n_j}$ voldoet aan
   $$\liminf_{n\to\infty} a_n \leq L \leq \limsup_{n\to\infty} a_n$$

   (ii) Beargumenteer dat er minstens één zo'n deelrij bestaat.

   (iii) Wat gebeurt er met de uitspraken van (i) en (ii) als we niet eisen dat de rij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ begrensd is?

   (iv) Gegeven twee begrensde rijen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ met $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ met $L < 0$. Bepaal $\limsup_{n\to\infty}(a_n b_n)$ in termen van L, $\liminf_{n\to\infty} b_n$, $\limsup_{n\to\infty} b_n$.

2. Veronderstel dat de reeks $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absoluut convergent is, en dat $a_n \neq 1$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

   Bewijs dat de reeks $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n^2}{1-a_n^2}$ absoluut convergent is.

3. (i) Bewijs met behulp van de definitie van compactheid dat de vereniging $A \cup B$ van de compacte verzamelingen A en B een compacte verzameling is.

   (ii) Veronderstel dat $A \cup B$ en A compacte verzamelingen zijn. Mogen we concluderen dat B compact is?

   (iii) Laat zien dat als A_i een compacte verzameling is voor elke $i \in \mathbb{N}$, dat dan $\displaystyle\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ niet compact hoeft te zijn.

ZOZ! Het tentamen gaat verder op de achterkant!

4. Veronderstel dat $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een rij is van positieve getallen. Veronderstel dat $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$. Veronderstel dat
$$\liminf_{n\to\infty} \frac{n(a_{n+1} - a_n)}{a_n} > 0.$$
Bewijs dat $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergent is.

5. Zij $f\colon A \to \mathbb{R}$ een functie op de verzameling $A \subset \mathbb{R}$. We veronderstellen dat A geen geïsoleerde punten heeft en dat f begrensd is.

   (i) Veronderstel dat $a \in \overline{A}$. Definieer $m\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ door middel van
   $$m(\delta) = \sup_{x\in N_\delta^*(a)\cap A} f(x), \qquad N_\delta^*(a) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < |x-a| < \delta\}$$
   Bewijs dat $\lim_{\delta\to 0, \delta>0} m(\delta)$ bestaat. We definiëren
   $$\limsup_{x\to a, x\in A} f(x) = \lim_{\delta\to 0,\delta>0} m(\delta)$$

   (ii) Bewijs dat de uitspraken (a) en (b) equivalent zijn:
   (a) $L = \limsup_{x\to a, x\in A} f(x)$
   (b) de volgende eigenschappen gelden
   - er bestaat een rij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ met $a_n \in A$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ en $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ en $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = L$
   - voor elke $r > L$ bestaat er een $\delta > 0$ zodanig dat $f(x) < r$ voor alle $x \in N_\delta^*(a) \cap A$

   (iii) Veronderstel nu dat A een gesloten interval is. Laat zien dat de volgende uitspraken (a) en (b) equivalent zijn:
   (a) voor elke $a \in A$ geldt $\limsup_{x\to a, x\in A} f(x) \le f(a)$.
   (b) voor alle $r \in \mathbb{R}$ is $\{x \in A \mid f(x) \ge r\}$ is gesloten (relatief ten opzichte van A)

De bonusregeling ten aanzien van de verwerking van uw resultaten voor het huiswerk en tussentoets, zoals vermeld in de studiewijzer, geldt voor dit tentamen.
