Radboud Universiteit Nijmegen

Tussentoets Analyse 1 WP001B
26 januari 2018, 08:30–10:30

---

1. Voor een rij $\{a_n\} \subseteq \mathbb{R}$, geef de definities van '$\{a_n\}$ convergeert' en van '$\{a_n\}$ is Cauchy rij'. Schets een bewijs van equivalentie van deze twee uitspraken.

2. Voor $n \in \mathbb{N}$ definieer
$$a_n = \sum_{j=n+1}^{2n} \frac{1}{j}, \qquad b_n = \sum_{j=n}^{2n} \frac{1}{j}.$$
Bewijs dat de rij $\{a_n\}$ stijgend is, de rij $\{b_n\}$ dalend is, en dat beide rijen naar hetzelfde getal L convergeren. (Heb je een idee welk getal dat is?)

3. Zijn de volgende beweringen waar? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.
   (a) Zij $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ een rij reële getallen zodaning dat $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Dan is de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ convergent.
   (b) Zij $\{a_n\}, \{b_n\}$ rijen van reële getallen zodanig dat $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergeert en $\{b_n\}$ begrensd is. Dan is $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ convergent.
   (c) Zij $\{a_n\}, \{b_n\}$ rijen van reële getallen zodanig dat $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absoluut convergeert en $\{b_n\}$ begrensd is. Dan is $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ absoluut convergent.

4. Zij $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ een reeks, waar de a_n reelle getallen zijn, en $S_N = \sum_{k=0}^{N} a_k$ de rij van partiële sommen. Definieer
$$C_m = \frac{\sum_{k=0}^{m-1} S_k}{m}.$$
   (i) Bewijs dat
$$C_m = \sum_{k=0}^{m-1} a_k \left(1 - \frac{k}{m}\right) = S_{m-1} - \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} k a_k.$$
   (ii) De reeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ heet <u>Cesàro-sommeerbaar</u> met Cesàro-som $L \in \mathbb{R}$ d.e.s.d.a. $\lim_{m\to\infty} C_m = L$. Bewijs: Als $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ naar L convergeert, dan is $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ Cesàro-sommeerbaar met Cesàro som L.
   (iii) Geef een voorbeeld voor een reeks die niet convergeert maar wel Cesàro sommeerbaar is.

Uitwerking

1. Convergentie: blz. 84, Cauchy rij: blz. 98. Equivalentie: Theorem 3.6.2 (blz. 99)

2. Het is duidelijk dat $b_n = a_n + 1/n$, dus $b_n > a_n \ \forall n$. Verder

$$a_{n+1} = \sum_{j=n+2}^{2(n+1)} \frac{1}{j} = \left(\sum_{j=n+1}^{2n} \frac{1}{j} \right) + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1}.$$

Dus

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{2}{2n+2} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} > 0,$$

dus $\{a_n\}$ is stijgend. Analoog:

$$b_{n+1} - b_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n} = \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n} \right) + \left(\frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n} \right) < 0,$$

dus $\{b_n\}$ is dalend. Dus: $\{a_n\}$ is stijgend en naar boven begrensd door b_1, dus convergent met limiet L. En $\{b_n\}$ is dalend en naar beneden begrensd door a_1, dus convergent naar K. Uit $b_n - a_n = 1/n \to 0$ volgt $K = L$, en we zijn klaar. (Er geldt $L = \ln(2)$.)

3. (a) FOUT: Tegenvoorbeeld $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Hiermee geldt $a_n \to 0$, maar $\sum_n a_n^2 = \sum_n \frac{1}{n} = \infty$.

(b) FOUT: Tegenvoorbeeld $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $b_n = (-1)^n$. Hiermee is $\sum_n a_n$ convergent (Theorem 4.3.3), maar $\sum_n a_n b_n = \sum_n \frac{1}{n} = \infty$.

(c) WAAR! Bewijs: $\{b_n\}$ is begrensd, er is dus een M zodanig dat $|b_n| \leq M \ \forall n$. Nu geldt $\sum_n |a_n b_n| \leq \sum_n |a_n| M = M \sum_n |a_n| < \infty$.

4. (i) Wij rekenen:

$$C_m = \frac{\sum_{k=0}^{m-1} S_k}{m} = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} S_k = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{\ell=0}^{k} a_\ell$$

In de dubbele som aan de rechterkant komt elk paar (k, ℓ) een keer voor dat aan $0 \leq \ell \leq k \leq m-1$ voldoet. Daarom kunnen wij $\sum_{k=0}^{m-1} \sum_{\ell=0}^{k}$ door $\sum_{\ell=0}^{m-1} \sum_{k=\ell}^{m-1}$ vervangen en krijgen

$$\begin{aligned} C_m &= \frac{1}{m} \sum_{\ell=0}^{m-1} \sum_{k=\ell}^{m-1} a_\ell = \frac{1}{m} \sum_{\ell=0}^{m-1} a_\ell \sum_{k=\ell}^{m-1} 1 = \frac{1}{m} \sum_{\ell=0}^{m-1} a_\ell \, (m - \ell) = \sum_{\ell=0}^{m-1} a_\ell \, \frac{m-\ell}{m} \\ &= \sum_{\ell=0}^{m-1} a_\ell \left(1 - \frac{\ell}{m} \right) = \sum_{\ell=0}^{m-1} a_\ell - \sum_{\ell=0}^{m-1} a_\ell \frac{\ell}{m} = S_{m-1} - \frac{1}{m} \sum_{\ell=0}^{m-1} \ell a_\ell \end{aligned}$$

zoals gewenst.

(ii) Stel $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ convergeert naar L. Per definitie betekent dit $\lim_{m\to\infty} S_m = L$. Wij willen bewijzen dat $\lim_{m\to\infty} C_m = L$. Met de onder (i) bewezen formule is dit equivalent aan

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} k a_k = 0. \tag{1}$$

Per aanname is $\sum_n a_n$ convergent. Het Cauchy criterium zegt ons dat voor elk $\varepsilon > 0$ een $N \in \mathbb{N}$ bestaat zodat

$$n, m \geq N \Rightarrow |\sum_{k=n}^{m} a_k| < \varepsilon \tag{2}$$

Zij dus $\varepsilon > 0$. Kies N zodat (2) geldt. Voor $m \geq N$ hebben wij

$$\frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m-1} k a_k = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{N-1} k a_k + \frac{1}{m} \sum_{k=N}^{m-1} k a_k.$$

De eerste term aan de rechterkant is een constante gedeeld door m, er is dus een N' zodat die term kleiner is dan ε mits $m \geq N'$. De tweede term schrijven we als

$$\frac{1}{m} \sum_{k=N}^{m-1} k a_k = \frac{1}{m} \left(N \sum_{k=N}^{m-1} a_k + \sum_{k=N+1}^{m-1} a_k + \sum_{k=N+2}^{m-1} a_k + \cdots + \sum_{k=m-1}^{m-1} a_k \right)$$

Met de driehoeksongelijkheid hebben we

$$\left| \frac{1}{m} \sum_{k=N}^{m-1} k a_k \right| \leq \frac{1}{m} \left(N \left| \sum_{k=N}^{m-1} a_k \right| + \left| \sum_{k=N+1}^{m-1} a_k \right| + \left| \sum_{k=N+2}^{m-1} a_k \right| + \cdots + \left| \sum_{k=m-1}^{m-1} a_k \right| \right)$$

Dankzij (2) is elk van de uitdrukkingen $|\cdots| \leq \varepsilon$, dus

$$\left| \frac{1}{m} \sum_{k=N}^{m-1} k a_k \right| \leq \frac{1}{m} (N\varepsilon + \varepsilon + \cdots + \varepsilon) = \frac{(N + m - N - 1)\varepsilon}{m} \leq \varepsilon.$$

Dus: Als $m \geq \max(N, N')$ dan geldt $|m^{-1} \sum_{k=1}^{m-1} k a_k| \leq 2\varepsilon$. Gezien ε willekeurig was hebben wij (1) bewezen.

(iii) Zij $a_n = (-1)^n$. Dus $a_0 = a_2 = \cdots = 1$ en $a_1 = a_3 = \cdots = -1$. Dan is $S_0 = 1, S_1 = 0, S_2 = 1, \ldots$. Dus $S_{2n} = 1, S_{2n+1} = 0 \ \forall n$. (Dit geloof ik ook zonder inductie!) De reeks $\sum_n a_n$ convergeert dus niet. Aan de andere kant,

$$C_{2n} = \frac{S_0 + \cdots + S_{2n-1}}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}, \quad C_{2n+1} = \frac{S_0 + \cdots + S_{2n}}{2n+1} = \frac{n+1}{2n+1},$$

en het is duidelijk dat $\lim_{n\to\infty} C_n = \frac{1}{2}$. De reeks $\sum_n a_n$ is dus Cesàro-sommeerbaar met Cesàro-som $\frac{1}{2}$.