Radboud Universiteit Nijmegen

Tentamen Analyse 1 (WP001B)
03 april 2018, 08:30–11:30 (12:00)

Het gebruik van een rekenmachine, telefoon of tablet is niet toegestaan. U mag geen gebruik maken van aantekeningen of boeken, het boek van Garling ingesloten. Geef precieze argumenten en antwoorden. Maak uw redenering zo helder mogelijk. Als een deelopdracht niet lukt mag u het resultaat veronderstellen om de volgende delen wel te maken.

---

1. Formuleer de Bolzano-Weierstrass stelling en geef een bewijs, zo volledig mogelijk.

2. (a) Zij $\{a_n\}, \{b_n\}$ rijen in $(0, \infty)$ waarvoor geldt $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell \neq 0$. Bewijs dat $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergeert d.e.s.d.a. $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergeert.

   (b) Gebruik (a) om de convergentie/divergentie van de volgende reeksen te bepalen:
$$\text{(i)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}, \qquad \text{(ii)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}, \qquad \text{(iii)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2+3}.$$

3. Zij $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en g reëelwaardige functies op $[a, b]$.

   (a) Geef de definities van puntsgewijze en van uniforme convergentie van f_n naar g.

   (b) Bewijs: Als alle f_n continu zijn en $f_n \to g$ uniform, dan is g continu.

   Het doel van de rest van de opgave is om een (partiële) omkering van (b) te bewijzen.

   (c) Zij f_n een rij continue functies $[a, b] \to \mathbb{R}$ zodat
$$\forall n \in \mathbb{N},\ x \in [a, b] : \quad f_{n+1}(x) \leq f_n(x) \quad \text{en} \quad \forall x \in [a, b] : \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0,$$
   (dus $f_n(x) \geq 0$) maar zodaning dat f_n *niet* uniform naar de nulfunctie convergeert. Bewijs dat er een $\varepsilon > 0$ en een rij $\{x_n\}$ in $[a, b]$ zijn zodat $f_n(x_n) \geq \varepsilon$ voor alle n.

   (d) Onder de aannames van (c), gebruik de Bolzano-Weierstrass stelling en de monotonie $f_{n+1} \leq f_n$ om een contradictie te produceren. Concludeer dat wel geldt dat $f_n \to 0$ uniform. Hint: Bewijs en gebruik $f_n(x_{n+m}) \geq f_{n+m}(x_{n+m})$.

   (e) Gebruik het resultaat van (d) om de volgende Stelling te bewijzen:
   Stelling [Dini] Zij $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en g continue functies $[a, b] \to \mathbb{R}$. Stel $f_n \to g$ puntsgewijs en monotoon. Dan is de convergentie $f_n \to g$ uniform.

Z.O.Z.

4. Zij $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ een functie.

   (a) Geef de definitie van differentieerbaarheid van f in $x \in (a, b)$.

   (b) Bewijs: Als f differentieerbaar is in x dan is f continu in x.

   (c) Bewijs: Als f differentieerbaar is in x met $f'(x) > 0$ dan is er een $\delta > 0$ zodat

   $$x - \delta < y < x < z < x + \delta \;\Rightarrow\; f(y) < f(x) < f(z).$$

   (d) Bewijs of weerleg (door tegenvoorbeeld): Als f differentieerbaar is op (a, b) dan is f' continu op (a, b).

   We willen nu de volgende bewering bewijzen:
   Stelling Zij $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ differentieerbaar, $a < c < d < b$ en $f'(c) < v < f'(d)$. Dan is er een $x \in (c, d)$ zodanig dat $f'(x) = v$.

   (e) Definieer $g : (a, b) \to \mathbb{R}$ door $g(x) = f(x) - vx$. Bewijs:
   - g is continu op $[c, d]$, dus (waarom?) g is naar beneden begrensd en er is een $x \in [c, d]$ zodat $g(x) = \inf_{y \in [c,d]} g(y)$.
   - $c \neq x \neq d$, dus (waarom?) $g'(x) = 0$. Hint: (c)
   - Maak het bewijs van de stelling af.

   (f) Concludeer uit de net bewezen stelling dat de tussenwaardestelling ook voor zekere niet-continue functies geldt.

5. Zij $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ een machtreeks met convergentiestraal $R > 0$. Bewijs dat f differentieerbaar is in $x = 0$ en $f'(0) = a_1$.

   (Let op: Dit is niet erg moeilijk, maar ook niet volstrekt triviaal!)

Normering							
Opgave	1	2	3	4	5	Gratis	Totaal
Punten	7	7	12	13	6	5	50

Het onafgeronde tentamencijfer T is het totaal aantal behaalde punten gedeeld door 5.

Uitwerking

1. Zie Garling Stelling 3.4.1, waar twee bewijzen gegeven worden. Voor een derde bewijs zie de tweede helft van Stelling 3.5.2.

2. (a) Uit $\frac{a_n}{b_n} \to \ell \neq 0$ volgt dat er een $N \in \mathbb{N}$ is zodat voor $n \geq N$ geldt $\frac{\ell}{2} \leq \frac{a_n}{b_n} \leq 2\ell$, dus ook $\frac{\ell}{2} b_n \leq a_n \leq 2\ell b_n$. Voor elk $M > N$ geldt dus

$$\frac{\ell}{2} \sum_{n=N}^{M} b_n \leq \sum_{n=N}^{M} a_n \leq 2\ell \sum_{n=N}^{M} b_n.$$

Met Corollary 4.2.2 (vergelijkstoets) volgt dat $\sum_{n=N}^{\infty} a_n < \infty \;\Leftrightarrow\; \sum_{n=N}^{\infty} b_n < \infty$, dus ook $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \;\Leftrightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$.

(b) We weten dat $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$ en $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$. Met (a) volgt onmideelijk dat de sommen (i) en (ii) divergeren en (iii) convergeert, want

$$\frac{\frac{1}{2n}}{\frac{1}{n}} \to \frac{1}{2}, \quad \frac{\frac{1}{2n-1}}{\frac{1}{n}} \to \frac{1}{2}, \quad \frac{\frac{2}{n^2+3}}{\frac{1}{n^2}} \to 2.$$

3. (a) Zie Garling blz. 165.

(b) Zie Garling Stelling 6.5.1.

(c) Uniforme convergentie $f_n \to 0$ betekent dat er voor elk $\varepsilon > 0$ een $N \in \mathbb{N}$ is zodat $n \geq N \;\Rightarrow\; \sup_x |f_n(x)| < \varepsilon$. (De absolute-waarde-tekens kunnen wij weglaten gezien $f_n(x) \geq 0$.) Als dit niet waar is dan is er een $\varepsilon > 0$ zodat er willekeurig grote n zijn met $\sup_x |f_n(x)| \geq \varepsilon$. Als we dit met het gevolg $\sup_x f_{n+1}(x) \leq \sup_x f_n(x)$ van de monotonie van $\{f_n\}$ combineren krijgen we $\sup_x f_n(x) \geq \varepsilon$ voor *alle* n. De f_n zijn continu en nemen dus hun suprema aan. Er zijn dus $x_n \in [a, b]$ zodat $f_n(x_n) = \sup_x f_n(x) \geq \varepsilon$ voor elk n. (Zonder dit te gebruiken volgt direct uit de definitie van het supremum dat er x_n zijn met $f_n(x_n) \geq \varepsilon/2$, wat voor het vervolg voldoende is.)

(d) De rij $\{x_n\}$ is begrensd en heeft dus volgens Bolzano en Weierstrass een convergente deelrij $\{x_{n_k}\}$ met limiet $z \in [a, b]$. Met de afkorting $g_k = f_{n_k}$ en $y_k = x_{n_k}$ geldt dus $g_k(y_k) \geq \varepsilon \;\forall k$ en $y_k \to z$. De rij $\{g_k\}$ is ook monotoon dalend, waaruit volgt

$$g_n(y_{n+m}) \geq g_{n+m}(y_{n+m}) \geq \varepsilon \quad \forall n, m.$$

Met $\lim_{m\to\infty} y_{n+m} = z$ en de continuiteit van g_n volgt $g_n(z) = \lim_{m\to\infty} g_n(y_{n+m}) \geq \varepsilon$. Maar dit spreekt de puntsgewijze convergentie $\lim_{n\to\infty} g_n(z) = 0$ tegen.

(e) Stel de rij $\{f_n\}$ is monotoon dalend en puntsgewijs convergent naar g. Dan zijn de functies $\{f_n - g\}$ continu en convergeren monotoon puntsgewijs dalend naar 0, convergeren dus uniform met (d). Dus $f_n \to g$ uniform. Als f_n monotoon stijgend naar g convergeert bekijk $\{g - f_n\}$.

4. (a) Garling blz. 173.

   (b) Garling, opmerking onder de definitie van differentieerbaarheid.

   (c) Garling Prop. 7.1.5(v).

   (d) De functie $f(0) = 0, f(x) = x^2 \sin(1/x)$ $(x \neq 0)$ is op heel $\mathbb{R}$ differentieerbaar, maar f' is in $x = 0$ niet continu (hoorcollege).

   (e)
   - f is diff-baar, dus continu, op (a, b), dus zeker op $[c, d] \subseteq (a, b)$. Hetzelfde geldt voor $g(x) = f(x) - vx$.
   - g is continu op $[c, d]$, dus begrensd en neemt zijn infimum in een zeker $x \in [c, d]$ aan (Stelling 6.3.6). Er geldt $g'(c) < 0 < g'(d)$. Dus met (c) volgt dat $g(c+\varepsilon) < g(c)$ en $g(d-\varepsilon) < g(d)$ voor $\varepsilon > 0$ klein genoeg. Het infimum van g op $[c, d]$ ligt dus niet in c of d. Nu volgt met Prop. 7.3.1 dat $g'(x) = 0$.
   - Volgt uit $0 = g'(x) = f'(x) - v$.

   (f) Zij $g = f'$ met f zoals in (d). Dan is g niet overal continu, maar voldoet aan een tussenwaardestelling dankzij de in (e) bewezen stelling.

5. We moeten bewijzen dat
$$\lim_{h \to 0} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n h^n - a_0}{h} = a_1.$$
De linker kant is gelijk aan
$$\lim \frac{\sum_{n=1}^{\infty} a_n h^n}{h} = \lim \frac{\sum_{n=1}^{\infty} a_n h^n}{h} = \lim \sum_{n=1}^{\infty} a_n h^{n-1} = a_1 + h \lim \sum_{n=2}^{\infty} a_n h^{n-2}.$$
Het is dus voldoende om te bewijzen dat de convergentiestraal R' van de machtreeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} x^n$ gelijk is aan R, want dan is $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} x^n$ continu op $(-R, R)$. Hiervoor is het voldoende om op te merken dat $\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^{n-2}$ convergeert d.e.s.d.a. $x^2 \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^{n-2}$ convergeert, wat wederom equivalent is aan convergentie van $\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n$ en dus van $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.