Radboud Universiteit Nijmegen

Tentamen Analyse 2 WB001B, 27 januari 2016, 12.30–15.30

Het gebruik van een rekenmachine en/of telefoon is niet toegestaan. U mag geen gebruik maken van de boeken *Analysis I, II*, collegeaantekeningen, e.d. Geef precieze argumenten en antwoorden. Maak uw redenering zo helder mogelijk, en geef duidelijk aan welke resultaten u gebruikt in uw antwoord.

---

1. Zij (X, d_X) en (Y, d_Y) metrische ruimtes, en zij $f\colon X \to Y$ een functie.

   (a) Zij $x_0 \in X$. Wanneer heet f continu in x_0?

   (b) Bewijs dat de volgende uitspraken equivalent zijn:

   (i) f is continu

   (ii) voor elke open verzameling $U \subset Y$ geldt dat $f^{-1}(U)$ open is in X

   (iii) voor elke gesloten verzameling $V \subset Y$ geldt dat $f^{-1}(V)$ gesloten is in X

   (iv) voor elke verzameling $A \subset X$ geldt $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$

   (c) Veronderstel dat d_X de discrete metriek is. Laat zien dat elke $f\colon X \to Y$ continu is.

2. Laat $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ voor $a < b$. Veronderstel dat $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een rij functies is met $f_n\colon I \to \mathbb{R}$. Zij $f\colon I \to \mathbb{R}$.

   (a) Geef de definitie van de uniforme convergentie van $\lim_{n\to\infty} f_n = f$.

   (b) Veronderstel dat f_n Riemann integreerbaar (over I) is voor elke $n \in \mathbb{N}$, en dat er een $f\colon I \to \mathbb{R}$ bestaat zodat $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ met uniforme convergentie. Laat zien dat f Riemann integreerbaar over I is, en

$$\lim_{n\to\infty} \int_I f_n = \int_I f$$

3. (a) Formuleer de inverse functiestelling.

   (b) Zij $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ een functie zodanig dat $f'(x_0)$ inverteerbaar is voor elke $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Bewijs dat f een open afbeelding is, dat wil zeggen dat voor elke open verzameling V de beeldverzameling $f(V)$ open is.

Z.O.Z. Het tentamen gaat aan de achterzijde verder!! Z.O.Z.

4. (a) Wanneer heet een verzameling $E \subset \mathbb{R}^n$ een meetbare verzameling?
   (b) Veronderstel dat E en F meetbare verzamelingen zijn. Bewijs met behulp van de definitie van (a) dat $E \cap F$ een meetbare verzameling is.
   (c) Zij $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ meetbaar, en zij $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ de uitgebreide reële rechte. Wanneer heet een functie $f \colon \Omega \to \mathbb{R}^*$ meetbaar?
   (d) Veronderstel dat $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een rij meetbare functies is met $f_n \colon \Omega \to \mathbb{R}^*$ voor elke $n \in \mathbb{N}$. Bewijs dat de puntsgewijs gedefinieerde functie $\limsup_{n\to\infty} f_n$ meetbaar is.

5. (a) Formuleer het lemma van Fatou.
   (b) Formuleer de gedomineerde convergentiestelling van Lebesgue.
   (c) Bewijs uw uitspraak van (b) met behulp van (a).
   (d) Voor een meetbare functie $f \colon \Omega \to \mathbb{R}^*$ definiëren we de functie $\omega \colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ door $\omega(\alpha) = m(\{x \in \Omega \mid f(x) > \alpha\})$.
      (i) Veronderstel dat f niet-negatief is. Bewijs dat voor $p > 0$ en voor $\alpha > 0$ geldt
      $$\alpha^p\, \omega(\alpha) \leq \int_{\{x\in\Omega \mid f(x)>\alpha\}} f^p$$
      (ii) Veronderstel bovendien dat de niet-negatieve meetbare functie f voldoet aan $\int_\Omega f^p < \infty$. Laat zien dat
      $$\lim_{\alpha\to\infty} \alpha^p\, \omega(\alpha) = 0$$
      (*Hint.* Gedomineerde convergentiestelling.)

Normering							
Opgave	1	2	3	4	5	Gratis	Totaal
Punten	10	8	7	10	10	5	50

Het eindcijfer T is de gebruikelijke afronding van het totaal aantal behaalde punten gedeeld door 5 naar hele en halve cijfers (met uitzondering van 5.5), waarin een eventueel resultaat voor huiswerk en/of tussentoets voor de afronding wordt verwerkt.

Uitwerkingen en hints

Opgave 1.

(a) Definition 2.1.1 (p. 28)

(b) Theorem 2.1.5 (a), (c), (d) voor de equivalentie van (i), (ii), (iii).

Om nog de equivalentie met (iv) te zien, veronderstel eerst dat (iii) geldt. Kies $A \subset X$ willekeurig, en beschouw de gesloten verzameling $\overline{f(A)} \subset Y$. Volgens (iii) is dan $f^{-1}(\overline{f(A)})$ gesloten in X. Merk op dat $A \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$, en dus ook $\overline{A} \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$ (want $f^{-1}(\overline{f(A)})$ gesloten). Beschouw het beeld, dan $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$, ofwel (iv).

Omgekeerd, veronderstel (iv) geldt en neem $V \subset Y$ gesloten, en beschouw $\overline{f^{-1}(V)} \subset X$. We willen bewijzen dat $f^{-1}(V) \subset X$ gesloten is. Volgens (iv) geldt $f(\overline{f^{-1}(V)}) \subset \overline{f(f^{-1}(V))}$. Merk op dat $f(f^{-1}(V)) \subset V$ en dus $\overline{f(f^{-1}(V))} \subset \overline{V} = V$. Dus we krijgen

$$f(\overline{f^{-1}(V)}) \subset \overline{f(f^{-1}(V))} \subset \overline{V} = V$$

en met inverse beeld volgt $\overline{f^{-1}(V)}) \subset f^{-1}(V)$, en dus is $f^{-1}(V)$ gesloten, en (iii) volgt.

(c) In de discrete metriek is elke verzameling open (en ook gesloten), en dus is elke $f^{-1}(U)$ open (of gesloten) voor elke open $U \in Y$ onafhankelijk van de afbeelding f.

Opgave 2.

(a) Definition 3.2.7 (p. 51)

(b) Theorem 3.6.1 (p. 61)

Opgave 3.

(a) Theorem 6.7.2 (p. 153).

(b) Exercise 6.7.3.

Opgave 4.

(a) Definition 7.4.1 (p. 177)

(b) Lemma 7.4.4(c) (p. 178)

(c) Definition 7.5.9 (p. 185)

(d) Lemma 7.5.10 (p. 185)

Opgave 5

(a) Lemma 8.2.13 (p. 198)

(b) Theorem 8.3.4 (p. 202)

(c) Bewijs van Theorem 8.3.4 (p. 202-3)

(d) (i) Schrijf

$$\int_{\Omega} f^p = \int_{\{x\in\Omega | f(x)>\alpha\}} f^p + \int_{\{x\in\Omega | f(x)\leq\alpha\}} f^p \geq \int_{\{x\in\Omega | f(x)>\alpha\}} f^p \geq \int_{\{x\in\Omega | f(x)>\alpha\}} \alpha^p = \omega(\alpha)\,\alpha^p$$

(ii) Het is voldoende om te bewijzen dat

$$\lim_{\alpha\to\infty} \int_{\{x\in\Omega | f(x)>\alpha\}} f^p = 0$$

Kies daartoe een willekeurige rij $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ met $\lim_{k\to\infty} \alpha_k = \infty$. Definieer

$$f_k(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) > \alpha_k, \\ 0 & f(x) \leq \alpha_k. \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad \int_{\{x\in\Omega | f(x)>\alpha_k\}} f^p = \int_{\Omega} f_k^p$$

Omdat $\int_{\Omega} f^p < \infty$ volgt dat $m(\{x \in \Omega \mid f(x) = +\infty\}) = 0$, en dus volgt $\lim_{k\to\infty} f_k = 0$ (puntsgewijs). Om nu de gedomineerde convergentiestelling toe te passen hebben we een dominerende functie nodig; $0 \leq f_k^p \leq f^p \in L(\Omega)$. Toepassing van de gedomineerde convergentiestelling geeft nu

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\{x\in\Omega | f(x)>\alpha_k\}} f^p = \lim_{k\to\infty} \int_{\Omega} f_k^p = \int_{\Omega} \lim_{k\to\infty} f_k^p = 0$$