Radboud Universiteit Nijmegen

Tentamen Analyse 2 WB001B, 3 mei 2016, 8.30–11.30

Het gebruik van een rekenmachine en/of telefoon is niet toegestaan. U mag geen gebruik maken van de boeken *Analysis I, II*, collegeaantekeningen, e.d. Geef precieze argumenten en antwoorden. Maak uw redenering zo helder mogelijk, en geef duidelijk aan welke resultaten u gebruikt in uw antwoord.

---

1. Zij (X, d) een metrische ruimte. Voor een niet-lege verzameling $A \subset X$ definieer

$$f_A(x) = \inf\{d(x, a) \mid a \in A\} = \inf_{a \in A} d(x, a)$$

   (a) Bewijs dat $f_A \colon X \to \mathbb{R}$ continu is

   (b) Laat zien dat $\overline{A} = \{x \in X \mid f_A(x) = 0\}$.

   (c) Veronderstel dat A en B gesloten niet-lege deelverzamelingen van X zijn met $A \cap B = \emptyset$. Definieer $g \colon X \to \mathbb{R}$ door $g(x) = f_A(x) + f_B(x)$. Bewijs dat g een continue functie is met de eigenschap dat $g(x) > 0$ voor elke $x \in X$.

   (d) Bewijs dat $h \colon X \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $h(x) = \dfrac{f_A(x)}{g(x)}$ voldoet aan de volgende eigenschappen:

      (i) $h \colon X \to \mathbb{R}$ is continu

      (ii) $0 \leq h(x) \leq 1$ voor alle $x \in X$

      (iii) $h(x) = 0$ voor alle $x \in A$

      (iv) $h(x) = 1$ voor alle $x \in B$

2. (a) Wanneer heet een metrische ruimte (X, d_X) compact?

   (b) Zij (Y, d_Y) ook een metrische ruimte. Wanneer heet een functie $f \colon X \to Y$ uniform continu?

   (c) Veronderstel dat $f \colon X \to Y$ continu is en dat (X, d_X) compact is. Laat zien dat f uniform continu is.

3. (a) Formuleer de inverse functiestelling.

   (b) Bewijs de volgende uitspraak. Zij $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ een continu differentieerbare functie, en zij $y = (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ met $f(y) = 0$ en $\frac{\partial f}{\partial x_n}(y) \neq 0$. Dan bestaat er een open verzameling $U \subset \mathbb{R}^{n-1}$ met $(y_1, \cdots, y_{n-1}) \in U$, een open verzameling V in $\mathbb{R}^n$ en een functie $g \colon U \to \mathbb{R}$ met $g(y_1, \cdots, y_{n-1}) = y_n$ en zodanig dat

$$\{x = (x_1, \cdots, x_n) \in V \mid f(x) = 0\} = \{(x_1, \cdots, x_{n-1}, g(x_1, \cdots, x_{n-1})) \mid (x_1, \cdots, x_{n-1}) \in U\}$$

Z.O.Z. Het tentamen gaat aan de achterzijde verder!! Z.O.Z.

4. (a) Wanneer heet $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ meetbaar?
   (b) Veronderstel dat $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ meetbaar is, en dat $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ voldoet aan de eigenschap: er bestaat een verzameling $A \subset \mathbb{R}^n$ met uitwendige maat $m^*(A) = 0$ zodanig dat $f(x) = g(x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus A$. Laat zien dat g meetbaar is.
   (c) Veronderstel dat $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continu is. Laat zien dat f meetbaar is.

5. (a) Formuleer de monotone convergentiestelling van Lebesgue voor niet-negatieve meetbare functies.
   (b) Formuleer het lemma van Fatou.
   (c) Bewijs uw uitspraak bij (b).
   (d) Zij $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ een meetbare verzameling met $m(\Omega) < \infty$. Veronderstel dat $f_n\colon \Omega \to \mathbb{R}$ voor elke $n \in \mathbb{N}$ absoluut integreerbaar is (ofwel $f_n \in L(\Omega)$ voor elke $n \in \mathbb{N}$) en dat er een $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ bestaat zodanig dat $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ met uniforme convergentie. Bewijs dat $f \in L(\Omega)$ en dat
   $$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n = \int_\Omega f$$

Normering							
Opgave	1	2	3	4	5	Gratis	Totaal
Punten	10	9	8	8	10	5	50

Het eindcijfer T is de gebruikelijke afronding van het totaal aantal behaalde punten gedeeld door 5 naar hele en halve cijfers (met uitzondering van 5.5), waarin een eventueel resultaat voor huiswerk en/of tussentoets voor de afronding wordt verwerkt.

Uitwerkingen en hints

Opgave 1.

(a) Voor elke $z \in A$ geldt

$$f(x) \leq d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$$

Neem nu het infimum over $z \in A$, zodat

$$f(x) \leq d(x,y) + \inf_{z\in A} d(z,y) = d(x,y) + f(y) \quad \Longrightarrow \quad f(x) - f(y) \leq d(x,y).$$

Verwissel de rollen van x en y, dan volgt $|f(x) - f(y)| \leq d(x,y) = d(y,x)$. Voor x vast zien we dat voor alle ε er een $\delta = \varepsilon$ is zodanig dat

$$d(x,y) < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(y)| \leq d(x,y) < \delta = \varepsilon$$

Dus f continu in x voor elke $x \in X$.

Opmerking. f is zelfs uniform continu, en bovendien een contractie (maar niet in het algemeen een stricte contractie).

(b) Merk op dat, omdat f continu is, en $\{0\}$ gesloten is, dat $B = f^{-1}(\{0\}) = \{x \in X \mid f(x) = 0\}$ gesloten is. Bovendien is $A \subset B$.

In het bijzonder geldt dan $\bar{A} \subset \bar{B} = B$. Dit kun je ook direkt inzien. Laat $x \in \bar{A}$, dan geldt dat x kleeft (adherent is) aan A. Dan geldt $\forall \varepsilon > 0$ is er een $y \in A$ met $d(x,y) < \varepsilon$. Ofwel, voor elke $\varepsilon > 0$ is $\inf_{y\in A} d(x,y) < \varepsilon$, en dus is $f(x) = \inf_{y\in A} d(x,y) = 0$ (want f is niet-negatief). Dus $x \in B$.

Omgekeerd, als $x \notin \bar{A}$, dan is $x \in (\bar{A})^c$ en dat is een open verzameling. Er bestaat dus een $r > 0$ met $B_r(x) \subset \bar{A}^c$. In het bijzonder, $B_r(x) \subset A^c$ en $f(x) \geq r > 0$ Dus $x \notin B$.

(c) g is continu als som van twee continue functies. Omdat f_A, f_B niet-negatieve functies zijn volgt dat g een niet-negatieve functie is. Bovendien $g(x) = 0$ dan en slechts dan als $f_A(x) = 0$ en $f_B(x) = 0$. Omdat A en B gesloten zijn, volgt dat dus moet volgen $x \in A$ en $x \in B$, ofwel $x \in A \cap B = \emptyset$. Dus g is nergens nul.

(d) h is continu als quotiënt van twee continue functies waarbij de noemer nooit nul is, dus (i) volgt. Omdat teller en noemer niet-negatief zijn, is h een niet-negatieve functie. Verder geldt $f_A(x) \leq f_A(x) + f_B(x) = g(x)$ en dus $h(x) \leq 1$. Dus $0 \leq h(x) \leq 1$ voor alle $x \in X$ en (ii) volgt. Als $x \in A$, dan is $f_A(x) = 0$, en dus $h(x) = 0$ en dus volgt (iii). Als $x \in B$, dan is $f_B(x) = 0$, en dus $g(x) = f_A(x)$ ofwel $h(x) = 1$.

Opgave 2.

(a) Definition 1.5.1 (p. 21)

(b) Definition 2.3.4 (p. 34)

(c) Dit is een deel van Theorem 2.3.5 (p. 34-5).

Opgave 3.

(a) Theorem 6.7.2 (p. 153).

(b) Deel van het bewijs van de impliciete functiestelling, Theorem 6.8.1 (p. 158-9)

Opgave 4.

(a) Definition 7.5.1 (p. 183)

(b) Exercise 7.5.5 (p. 186)

(c) Lemma 7.5.2 (p. 183)

Opgave 5

(a) Theorem 8.2.9 (p. 194-5)

(b) Lemma 8.2.13 (p. 198)

(c) Bewijs van Lemma 8.2.13 (p. 198)

(d) Merk op dat f meetbaar is, als limiet van meetbare functies.

$$|f(x)| = |f(x) - f_k(x) + f_k(x)| \leq |f(x) - f_k(x)| + |f_k(x)| \leq 1 + |f_k(x)|$$

door $k \in \mathbb{N}$ zodanig te kiezen dat $|f(x) - f_k(x)| < 1$ voor alle $x \in \Omega$ (vanwege uniforme convergentie). Dan

$$\int_\Omega |f| \leq \int_\Omega (1 + |f_k|) = m(\Omega) + \int_\Omega |f_k| < \infty$$

omdat Ω eindige maat heeft en $f_k \in L(\Omega)$. Kies $\varepsilon > 0$ en zij daarbij $K \in \mathbb{N}$ zodanig dat voor alle $k \geq K$ en alle $x \in \Omega$ geldt dat $|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$, dan

$$\left| \int_\Omega f_k - \int_\Omega f \right| = \left| \int_\Omega (f_k - f) \right| \leq \int_\Omega |f_k - f| < \varepsilon\, m(\Omega)$$

dus $\lim_{k\to\infty} \int_\Omega f_k = \int_\Omega f$.