
Het gebruik van een rekenmachine en/of telefoon is niet toegestaan. U mag geen gebruik maken van de boeken *Analysis I, II*, collegeaantekeningen, e.d. Geef precieze argumenten en antwoorden. Maak uw redenering zo helder mogelijk, en geef duidelijk aan welke resultaten u gebruikt in uw antwoord.

1. Laat (X, d_X) en (Y, d_Y) metrische ruimtes zijn.

- (a) Wanneer heet de functie $f: X \rightarrow Y$ continu?
- (b) Veronderstel dat de functie $f: X \rightarrow Y$ continu is. Laat zien dat voor een compacte deelverzameling $K \subseteq X$ geldt dat $f(K)$ een compacte deelverzameling van Y is.
- (c) Zij $B(X, Y) = \{f: X \rightarrow Y \mid f \text{ begrensd}\}$ de metrische ruimte van begrensde functies voorzien van de metriek $d_\infty(f, g) = \sup_{x \in X} d_Y(f(x), g(x))$. (Dit is gegeven, géén bewijs nodig!)
Bewijs de volgende uitspraak: als (Y, d_Y) volledig is, dan is de metrische ruimte $B(X, Y)$ met de metriek d_∞ volledig.

2. (a) Bewijs de partiële sommatieformule: Gegeven twee convergente rijen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ met $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ en $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$, en veronderstel $\sum_{n=0}^{\infty} (a_{n+1} - a_n)b_n$ convergent is. Dan is ook $\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(b_{n+1} - b_n)$ convergent en

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_{n+1} - a_n)b_n = AB - a_0b_0 - \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(b_{n+1} - b_n)$$

(b) Veronderstel dat $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ convergentiestraal 1 heeft, en dat $C = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$ convergent is. Stel $S_N = -C + \sum_{n=0}^{N-1} c_n$, laat zien dat voor $-1 < x < 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = C + \sum_{n=0}^{\infty} S_{n+1}(x^n - x^{n+1})$$

(c) Veronderstel de situatie van (b). Bewijs dat $\lim_{x \rightarrow 1, x \in (0,1)} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$, ofwel bewijs een speciaal geval van de Stelling van Abel.

3. (a) Formuleer de inverse-functiestelling.
 (b) Beschouw de afbeelding $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ gedefinieerd door $F(r, t) = (r \cos t, r \sin t)$. Voor welke punten is de inverse functiestelling van (a) toepasbaar?
 (c) Is F globaal inverteerbaar?
4. (a) Gegeven de uitwendige maat m^* op $\mathbb{R}^n$, die u zonder toelichting mag gebruiken. Wanneer heet de verzameling $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ meetbaar?
 (b) Wanneer heet $f: \Omega \rightarrow [0, \infty]$ meetbaar?
 (c) Bewijs de ongelijkheid van Chebyshev: voor $f: \Omega \rightarrow [0, \infty]$ meetbaar geldt dat voor iedere $\alpha > 0$ dat (en U hoeft niet uit te leggen wat de integraal van f is)

$$m(\{x \in \Omega \mid f(x) > \alpha\}) \leq \frac{1}{\alpha} \int_{\Omega} f$$

- (d) Bewijs met behulp van (c) dat voor $f: \Omega \rightarrow [0, \infty]$ meetbaar geldt:

$$\int_{\Omega} f = 0 \implies f = 0 \text{ bijna overal.}$$

5. (a) Formuleer het lemma van Fatou.
 (b) Formuleer de gedomineerde convergentiestelling van Lebesgue.
 (c) Bewijs de uitspraak van (b) met behulp van (a).
 (d) Bewijs de begrensde convergentiestelling: voor een meetbare $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ met $m(\Omega) < \infty$ en een rij $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ van absoluut integreerbare functies op Ω met de volgende eigenschappen (1) uniform begrensd (i.e. er bestaat een $M > 0$ met $|f_k(x)| \leq M$ voor alle k en voor alle x), en (2) $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k = f$ puntsgewijs, geldt dat f absoluut integreerbaar is en $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_k = \int_{\Omega} f$.

Normering							
Opgave	1	2	3	4	5	Gratis	Totaal
Punten	10	9	7	10	9	5	50

Het eindcijfer T is de gebruikelijke afronding van het totaal aantal behaalde punten gedeeld door 5 naar hele en halve cijfers (met uitzondering van 5.5), waarin een eventueel resultaat voor huiswerk en/of tussentoets voor de afronding wordt verwerkt.

Uitwerkingen en hints

Opgave 1. Laat (X, d_X) en (Y, d_Y) metrische ruimtes zijn.

- (a) Definition 13.1.1 (p. 420).
- (b) Theorem 13.3.1 (p. 427).
- (c) Het bewijs is analoog aan het bewijs van Theorem 14.4.5 (p. 454).

Neem $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ een Cauchyrij in $B(X, Y)$ met betrekking tot d_∞ . Dus

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall m, n \geq N \quad d_\infty(f_n, f_m) = \sup_{x \in X} d_Y(f_n(x), f_m(x)) < \varepsilon \quad (1)$$

In het bijzonder geldt dat voor vaste $x \in X$ de rij $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ een Cauchyrij in (Y, d_Y) is. Omdat (Y, d_Y) volledig is, convergeert deze rij. We stellen $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$. Dan is $f: X \rightarrow Y$.

We moeten nu nog bewijzen: (1) $f \in B(X, Y)$, en (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ in $B(X, Y)$.

Ad (1): merk op dat door de limiet $n \rightarrow \infty$ te nemen in $d_Y(f_n(x), f_m(x)) < \varepsilon$ dat we krijgen dat $d_Y(f(x), f_m(x)) \leq \varepsilon$ voor alle $m \geq N$. (Hiervoor gebruiken we dat als $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0$ in (Y, d_Y) , dat dan ook $\lim_{n \rightarrow \infty} d_Y(y_n, y) = d_Y(y_0, y)$ voor elke $y \in Y$.) In het bijzonder voor $m = N$ en f_N begrensd (dus $f_N(X) \subset B_R(y_0)$ voor zekere $R \geq 0$ en $y_0 \in Y$) volgt voor elke $x \in X$ dat

$$d_Y(f(x), y_0) \leq d_Y(f(x), f_N(x)) + d_Y(f_N(x), y_0) < \varepsilon + R$$

zodat $f(X) \subset B_{R+\varepsilon}(y_0)$.

Ad(2): we moeten laten zien dat

$$\forall \varepsilon_0 > 0 \quad \exists N \quad \forall m \geq N \quad d_\infty(f, f_m) = \sup_{x \in X} d_Y(f(x), f_m(x)) < \varepsilon_0$$

Kies $\varepsilon_0 > 0$ willekeurig, en laat $\varepsilon = \frac{1}{2}\varepsilon_0 > 0$. Door als voorheen de limiet $n \rightarrow \infty$ te nemen in (1)

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall m \geq N \quad d_\infty(f, f_m) = \sup_{x \in X} d_Y(f(x), f_m(x)) \leq \varepsilon < \varepsilon_0$$

Opgave 2.

(a) (Exercise 15.3.1) Gebruik partiële sommen:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^N a_{n+1}(b_{n+1} - b_n) &= \sum_{n=0}^N a_{n+1}b_{n+1} - \sum_{n=0}^N a_{n+1}b_n = \\
\sum_{n=1}^{N+1} a_nb_n - \sum_{n=0}^N a_{n+1}b_n &= \sum_{n=0}^N (a_n - a_{n+1})b_n - a_0b_0 + a_{N+1}b_{N+1} = \\
&= -a_0b_0 + a_{N+1}b_{N+1} - \sum_{n=0}^N (a_{n+1} - a_n)b_n
\end{aligned}$$

De limiet $N \rightarrow \infty$ van het rechterlid bestaat, en dus volgt dat de rij van partiële sommen een limiet heeft, en we krijgen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(b_{n+1} - b_n) = -a_0b_0 + AB - \sum_{n=0}^{\infty} (a_{n+1} - a_n)b_n$$

(b) Schrijf $c_n = S_{n+1} - S_n$, zodat voor $-1 < x < 1$ we (a) kunnen toepassen met $a_n = S_n$ en $b_n = x^n$. Omdat de reeks convergent is volgt dat $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent is en $A = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = C$, en $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ is convergent, en $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$, want $x \in (-1, 1)$. Invullen in (a) geeft dat

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_{n+1}(x^{n+1} - x^n) = -S_0x^0 + C \cdot 0 - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = C - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

Dit geeft het gevraagde

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = C + \sum_{n=0}^{\infty} S_{n+1}(x^n - x^{n+1})$$

(c) We moeten de Stelling van Abel bewijzen voor dit speciale geval. Merk op dat het algemene geval wordt gereduceerd naar dit speciale geval, dus eigenlijk bewijzen we de Stelling van Abel.

Kies $\varepsilon > 0$ willekeurig. Omdat $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 0$ volgt dat er een $N_S \in \mathbb{N}$ bestaat met $|S_n| < \frac{1}{2}\varepsilon$ voor alle $n \geq N_S$. Merk op dat voor $x \in (0, 1)$ geldt dat $x^n - x^{n+1} > 0$. Splits

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n - C \right| &= \left| \sum_{n=0}^{\infty} S_n(x^n - x^{n+1}) \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |S_n|(x^n - x^{n+1}) = \\
(1-x) \sum_{n=0}^{N_S-1} |S_n|x^n + \sum_{n=N_S}^{\infty} |S_n|(x^n - x^{n+1}) &< (1-x) \sum_{n=0}^{N_S-1} |S_n| + \frac{1}{2}\varepsilon \sum_{n=N_S}^{\infty} (x^n - x^{n+1}) = \\
(1-x) \sum_{n=0}^{N_S-1} |S_n| + \frac{1}{2}\varepsilon x^{N_S} &< (1-x) \sum_{n=0}^{N_S-1} |S_n| + \frac{1}{2}\varepsilon
\end{aligned}$$

Stel $M = \sum_{n=0}^{N_S-1} |S_n|$, en kies nu $\delta > 0$ zodanig dat $\delta < \frac{1}{2}\varepsilon\frac{1}{M}$, dan voor $x \in (1 - \delta, 1)$ volgt dat

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n - C \right| < (1-x) \sum_{n=0}^{N_S-1} |S_n| + \frac{1}{2}\varepsilon < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$$

Dus $\lim_{x \rightarrow 1, x \in (0,1)} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = C = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$.

Opmerking. Dit is de stelling van Abel (Theorem 15.3.1, p. 484).

Opgave 3.

- (a) Theorem 17.7.2 (p. 562)
- (b) Aangezien de partiële afgeleides

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial r}(r, t) &= \cos t, & \frac{\partial F_1}{\partial r}(r, t) &= -r \sin t, \\ \frac{\partial F_2}{\partial r}(r, t) &= \sin t, & \frac{\partial F_1}{\partial r}(r, t) &= r \cos t, \end{aligned}$$

allemaal continu zijn, geldt $F \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$. De totale afgeleide in het punt (r, t) wordt dan gegeven door de matrix

$$\begin{pmatrix} \cos t & -r \sin t \\ \sin t & r \cos t \end{pmatrix}$$

met determinant r . Dus de inverse functiestelling is toepasbaar in elk punt $(r, t) \in \mathbb{R}^2$ met $r \neq 0$.

- (c) Nee. F is niet injectief, bv $F(r, t) = F(r, t + 2\pi)$ of $F(r, t) = F(-r, t + \pi)$.

Opgave 4.

- (a) Definition 18.4.1 (p. 590)
- (b) Definition 18.5.9 (p. 599)
- (c) Merk op dat $A = \{x \in \Omega \mid f(x) > \alpha\}$ meetbaar is. De positieve simpele functie $s = \alpha \chi_A$ ligt onder f , en dus geldt per definitie van de integraal (Definition 19.2.2) dat

$$\int_{\Omega} f \geq \int_{\Omega} s = \alpha m(A)$$

Dit geeft de ongelijkheid.

- (d) Dit is een deel van Proposition 19.2.6 (p. 609). Stel $\int_{\Omega} f = 0$. Stel dan $E_k = \{x \in \Omega \mid f(x) > \frac{1}{k}\}$ voor $k \geq 1$. Dan $m(E_k) = 0$ vanwege de ongelijkheid van Chebyshev, en dan ook $m(\cup E_k) \leq \sum_k m(E_k) = 0$, en

$$\cup E_k = \{x \in \Omega \mid f(x) > 0\}$$

Dus $f = 0$ bijna overal.

Opgave 5.

- (a) Lemma 19.2.13 (p. 614)
- (b) Theorem 19.3.4 (p. 619)
- (c) Zie p.619-20.
- (d) Merk op dat de constante functie $F(x) = M$ een element $F \in L^1(\Omega)$ oplevert, omdat $m(\Omega) < \infty$. Pas nu de gedomineerde convergentiestelling van Lebesgue toe.