
Het gebruik van een rekenmachine en/of telefoon is niet toegestaan. U mag geen gebruik maken van de boeken *Analysis I, II*, collegeaantekeningen, e.d. Geef precieze argumenten en antwoorden. Maak uw redenering zo helder mogelijk, en geef duidelijk aan welke resultaten u gebruikt in uw antwoord.

1. Zij (X, d) een metrische ruimte en zij $\emptyset \neq A \subset X$. Definieer $f(x) = \inf_{y \in A} d(x, y)$.
 - (a) Bewijs dat de boven gedefinieerde $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ voldoet aan $|f(x) - f(y)| \leq d(x, y)$. Concludeer dat f continu is.
 - (b) Bewijs dat de afsluiting $\bar{A}$ voldoet aan $\bar{A} = \{x \in X \mid f(x) = 0\}$.
 - (c) Beschrijf de functie f in het geval dat X de discrete metriek heeft.
2. Laat (X, d_X) en (Y, d_Y) metrische ruimtes zijn.
 - (a) Wanneer heet de functie $f: X \rightarrow Y$ uniform continu?
 - (b) Veronderstel dat f een contractie is. Laat zien dat f uniform continu is.
 - (c) Veronderstel dat (X, d_X) compact is en dat $f: X \rightarrow Y$ continu is. Bewijs dat f uniform continu is.
3. (a) Formuleer de impliciete-functiestelling.
(b) Beschouw de functie $f: \mathbb{R}^7 \rightarrow \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$f(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, x) = \sum_{i=0}^5 a_i x^i$$

en veronderstel dat c^0 een enkelvoudig nulpunt is van het 5-de graads polynoom $p^0(x) = \sum_{i=0}^5 a_i^0 x^i$, ofwel $(p^0)'(c^0) \neq 0$ en $f(a_0^0, a_1^0, a_2^0, a_3^0, a_4^0, a_5^0, c^0) = 0$. Maak de uitspraak *een enkelvoudig nulpunt van een 5-de graads polynoom is lokaal een C^1 -functie van de coëfficiënten precies*.

4. (a) Veronderstel dat $E_k \subset \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$, meetbaar is, en dat $E_k \subset E_{k+1}$ voor alle k . Stel $E = \cup_{k \in \mathbb{N}} E_k$, dan weten we dat E meetbaar is. Laat zien dat $(m(E_k))_{k \in \mathbb{N}}$ een monotoon stijgende rij is met $\lim_{k \rightarrow \infty} m(E_k) = m(E)$. (*Hint*. Beschouw de disjuncte vereniging $E = E_0 \cup (\cup_{j=1}^{\infty} E_j \setminus E_{j-1})$.)

Z.O.Z. Het tentamen gaat aan de achterzijde verder!! Z.O.Z.

- (b) Veronderstel $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ meetbaar, en zij $(f_l)_{l \in \mathbb{N}}$ een rij meetbare functies $f_l: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, zodanig dat $\lim_{l \rightarrow \infty} f_l = f$ puntsgewijs bijna overal (zodat f ook meetbaar is). Kies $\varepsilon > 0$ willekeurig. Bewijs dat de verzameling $E_k = \{x \in \Omega \mid \forall l \geq k \mid f(x) - f_l(x) \mid < \varepsilon\}$ voldoet aan de voorwaarde van (a).
- (c) We gaan verder met de situatie van (b), en we veronderstellen bovendien dat $m(\Omega) < \infty$. Kies $\eta > 0$ willekeurig. Bewijs dat er een $K \in \mathbb{N}$ bestaat zodanig dat voor alle $k \geq K$ geldt dat $m(\Omega \setminus E_k) < \eta$. (*Hint.* U mag zonder bewijs gebruiken dat voor meetbare verzamelingen A en B met $A \subset B$ geldt $m(B \setminus A) = m(B) - m(A)$.)
- (d) We zeggen dat een rij meetbare functies $(f_l)_{l \in \mathbb{N}}$ met $f_l: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ *in maat* convergeert naar een meetbare functie $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ als

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{l \rightarrow \infty} m(\{x \in \Omega \mid \mid f(x) - f_l(x) \mid > \varepsilon\}) = 0$$

(NB: teken is veranderd!) Bewijs dat in de situatie van (b) en (c) de bijna overal puntsgewijze convergente rij $(f_l)_{l \in \mathbb{N}}$ ook in maat naar f convergeert.

- (e) Laat zien dat als we de eis $m(\Omega) < \infty$ laten vallen de uitspraak van (d) niet waar is. (*Hint.* Neem bijvoorbeeld $\Omega = \mathbb{R}$ en beschouw geschikte indicatorfuncties.)
5. (a) Formuleer de monotone-convergentie-stelling van Lebesgue.
- (b) Bewijs met behulp van de monotone convergentie stelling van Lebesgue de volgende uitspraak: voor $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ een meetbare verzameling en $g_i: \Omega \rightarrow [0, \infty]$ ($i \in \mathbb{N}$) meetbare functies, geldt

$$\int_{\Omega} \sum_{i=0}^{\infty} g_i = \sum_{i=0}^{\infty} \int_{\Omega} g_i$$

ofwel, voor niet-negatieve meetbare functies mogen reeksen en integralen worden verwisseld.

- (c) Bewijs dat als $\Omega_i \subset \mathbb{R}^n$ ($i \in \mathbb{N}$) meetbare verzamelingen zijn met de eigenschap dat $\sum_{i=0}^{\infty} m(\Omega_i)$ (waarbij $m(\Omega_i)$ de maat van de verzameling Ω_i is) convergent is, dan geldt dat de verzameling

$$\{x \in \mathbb{R}^n : x \in \Omega_i \text{ voor oneindig veel } i \in \mathbb{N}\}$$

maat nul heeft. (Dit is het Lemma van Borel-Cantelli.)

Normering							
Opgave	1	2	3	4	5	Gratis	Totaal
Punten	8	9	7	11	10	5	50

Het eindcijfer T is de gebruikelijke afronding van het totaal aantal behaalde punten gedeeld door 5 naar hele en halve cijfers (met uitzondering van 5.5), waarin een eventueel resultaat voor huiswerk en/of tussentoets voor de afronding wordt verwerkt.

Uitwerkingen en hints

Opgave 1.

- (a) Voor elke $z \in A$ geldt

$$f(x) \leq d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

Neem nu het infimum over $z \in A$, zodat

$$f(x) \leq d(x, y) + \inf_{z \in A} d(z, y) = d(x, y) + f(y) \implies f(x) - f(y) \leq d(x, y).$$

Verwissel de rollen van x en y , dan volgt $|f(x) - f(y)| \leq d(x, y) = d(y, x)$. Voor x vast zien we dat voor alle ε er een $\delta = \varepsilon$ is zodanig dat

$$d(x, y) < \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq d(x, y) < \delta = \varepsilon$$

Dus f continu in x voor elke $x \in X$.

Opmerking. f is zelfs uniform continu, en bovendien een contractie (maar niet in het algemeen een stricte contractie).

- (b) Merk op dat, omdat f continu is, en $\{0\}$ gesloten is, dat $B = f^{-1}(\{0\}) = \{x \in X \mid f(x) = 0\}$ gesloten is. Bovendien is $A \subset B$.

In het bijzonder geldt dan $\bar{A} \subset \bar{B} = B$. Dit kun je ook direkt inzien. Laat $x \in \bar{A}$, dan geldt dat x kleeft (adherent is) aan A , zie Definition 12.2.9 (p. 402). Dan geldt $\forall \varepsilon > 0$ is er een $y \in A$ met $d(x, y) < \varepsilon$. Ofwel, voor elke $\varepsilon > 0$ is $\inf_{y \in A} d(x, y) < \varepsilon$, en dus is $f(x) = \inf_{y \in A} d(x, y) = 0$ (want f is niet-negatief). Dus $x \in B$.

Omgekeerd, als $x \notin \bar{A}$, dan is $x \in (\bar{A})^c$ en dat is een open verzameling. Er bestaat dus een $r > 0$ met $B_r(x) \subset \bar{A}^c$. In het bijzonder, $B_r(x) \subset A^c$ en $f(x) \geq r > 0$. Dus $x \notin B$.

- (c) Voor de discrete metriek hebben we $d(x, x) = 0$ en $d(x, y) = 1$ voor alle $x \neq y$. Dus $f = \chi_{A^c}$ is de indicatorfunctie van het complement van de verzameling A .

Opgave 2.

- (a) Definition 13.3.4 (p. 428)
- (b) Een contractie, zie Definition 17.6.1 (p. 558), voldoet aan $d_Y(f(x), f(y)) \leq d_X(x, y)$. Kies bij ε dan bijvoorbeeld $\delta = \frac{1}{2}\varepsilon$.
- (c) Dit is een deel van Theorem 13.3.5 (p. 428).

Opgave 3.

- (a) Theorem 17.8.1 (p. 568).

- (b) De functie $f: \mathbb{R}^7 \rightarrow \mathbb{R}$ is C^1 , want het is een polynoom. Dan geldt

$$f(a_0^0, a_1^0, a_2^0, a_3^0, a_4^0, a_5^0, c^0) = 0,$$

en

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a_0^0, a_1^0, a_2^0, a_3^0, a_4^0, a_5^0, c^0) = (p^0)'(c^0) \neq 0$$

want het polynoom p^0 heeft een enkelvoudig nulpunt. Volgens de impliciete-functiestelling bestaan er een open deelverzameling $U \subset \mathbb{R}^6$ met $(a_0^0, a_1^0, a_2^0, a_3^0, a_4^0, a_5^0) \in U$ en een open deelverzameling $V \subset \mathbb{R}^7$ met $(a_0^0, a_1^0, a_2^0, a_3^0, a_4^0, a_5^0, c^0) \in V$ en een C^1 -functie $g: U \rightarrow \mathbb{R}$ zodanig dat

$$\begin{aligned} & \{(a_0^0, a_1^0, a_2^0, a_3^0, a_4^0, a_5^0, c^0) \in V \mid f(a_0^0, a_1^0, a_2^0, a_3^0, a_4^0, a_5^0, c^0) = 0\} = \\ & \{(a_0^0, a_1^0, a_2^0, a_3^0, a_4^0, a_5^0, g(a_0^0, a_1^0, a_2^0, a_3^0, a_4^0, a_5^0)) \mid (a_0^0, a_1^0, a_2^0, a_3^0, a_4^0, a_5^0) \in U\} \end{aligned}$$

ofwel het enkelvoudige nulpunt is een C^1 -functie g van de parameters $(a_0^0, a_1^0, a_2^0, a_3^0, a_4^0, a_5^0)$ van het polynoom.

Opgave 4.

- (a) Zie de uitgewerkte opgave 18.2.3 op blackboard.
 (b) Omdat f_l en f meetbaar zijn volgt, dat $|f_l - f|$ meetbaar is. Dus

$$F_l = \{x \in \Omega \mid |f_l(x) - f(x)| < \varepsilon\}$$

is meetbaar voor elke k . Merk op dat

$$E_k = \{x \in \Omega \mid \forall l \geq k \mid f(x) - f_l(x) \mid < \varepsilon\} = \bigcap_{l \geq k} F_l$$

dan meetbaar is als aftelbare intersectie van meetbare verzamelingen. Bovendien

$$\begin{aligned} E_n &= \{x \in \Omega \mid \forall k \geq n \mid f(x) - f_k(x) \mid < \varepsilon\} = \bigcap_{k \geq n} F_k = \\ & F_n \cap \bigcap_{k \geq n+1} F_k = F_n \cap E_{n+1} \subset E_{n+1} \end{aligned}$$

- (c) Merk op dat $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ voldoet aan $\Omega = E \cup Z$, voor Z een verzameling van maat 0, omdat $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k = f$ puntsgewijs bijna overal. Dan is $m(\Omega) \leq m(E) + m(Z) = m(E)$, en omdat $E \subset \Omega$ volgt ook de omgekeerde gelijkheid en dus $m(\Omega) = m(E)$. Vanwege (a) weten we dat $\lim_{k \rightarrow \infty} m(E_k) = m(E) = m(\Omega)$. Dus voor elke $\eta > 0$ bestaat er een K zodanig dat $m(\Omega \setminus E_k) = m(\Omega) - m(E_k) < \eta$ voor alle $k \geq K$.

(d) Kies $\varepsilon > 0$ vast. We willen laten zien dat

$$\lim_{l \rightarrow \infty} m(\{x \in \Omega \mid |f(x) - f_l(x)| > \varepsilon\}) = 0$$

Kies daartoe $\eta > 0$ willekeurig. Dan willen we bewijzen dat er een K bestaat zodanig dat

$$\forall l \geq K \quad m(\{x \in \Omega \mid |f(x) - f_l(x)| > \varepsilon\}) < \eta$$

We laten zien dat de K uit (c) voldoet. Kies $l \geq K$, dan

$$\begin{aligned} \{x \in \Omega \mid |f(x) - f_l(x)| > \varepsilon\} &= \Omega \setminus \{x \in \Omega \mid |f(x) - f_l(x)| \leq \varepsilon\} \\ &\subset \Omega \setminus \{x \in \Omega \mid |f(x) - f_l(x)| < \varepsilon\} = \Omega \setminus F_l \subset \Omega \setminus E_K \end{aligned}$$

want $E_K = \bigcap_{l \geq K} F_l \subset F_l$. Neem nu de maat, dan voor elke $l \geq K$ geldt

$$m(\{x \in \Omega \mid |f(x) - f_l(x)| > \varepsilon\}) \leq m(\Omega \setminus E_K) < \eta.$$

(e) Neem $\Omega = \mathbb{R}$, $f_l = \chi_{[-l, l]}$, $l \in \mathbb{N}$, dan convergeert $\lim_{l \rightarrow \infty} f_l = 1$ puntsgewijs. Maar $m(\{x \in \Omega \mid |f(x) - f_l(x)| > \varepsilon\}) = +\infty$ voor $0 < \varepsilon \leq 1$.

Opgave 5

(a) Theorem 19.2.9 (p. 610)

(b) Dit is Corollary 9.2.11 (p. 613). Neem $f_n = \sum_{i=0}^n g_i$ (puntsgewijs), dan voldoet de rij $(f_n)_{n=0}^\infty$ aan de voorwaarden van de monotone convergentie stelling van Lebesgue. Bovendien is $\sup_n \int_\Omega f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_\Omega f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \int_\Omega g_i = \sum_{i=0}^\infty \int_\Omega g_i$ (waarbij dit als ∞ wordt opgevat indien de reeks niet convergent is). Ook geldt puntsgewijs dat $\sup_n f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n g_i = \sum_{i=0}^\infty g_i$ met dezelfde conventie.

(c) Dit is Lemma 9.2.15 (p. 615). Pas het voorgaande toe met $g_i = \chi_{\Omega_i}$ (indicatorfunctie) en $\Omega = \mathbb{R}^n$. Dan geldt met (b) dat

$$\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=0}^\infty \chi_{\Omega_i} = \sum_{i=0}^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\Omega_i} = \sum_{i=0}^\infty m(\Omega_i) < +\infty$$

dus $\sum_{i=0}^\infty \chi_{\Omega_i}$ is integreerbaar. Gebruik nu dat voor een integreerbare niet-negatieve functie f geldt dat $m(\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = +\infty\}) = 0$. Pas dit toe met $f = \sum_{i=0}^\infty \chi_{\Omega_i}$ en merk op dat

$$\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = +\infty\} = \{x \in \mathbb{R}^n : x \in \Omega_i \text{ voor oneindig veel } i \in \mathbb{N}\}.$$