Radboud Universiteit Nijmegen

Tussentoets Analyse 1 WP001B
08 april 2016, 08:30–10:30

---

1. (a) Zij F een geordend lichaam en $0 \neq x \in F$. Bewijs dat $x^2 > 0$.
   (b) Bewijs dat er geen totaal ordening $\leq$ op $\mathbb{C}$ is waarmee $(\mathbb{C}, \leq)$ een geordend lichaam is.

2. (a) Bewijs $\lim_{n\to\infty} n \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1\right) = \frac{1}{2}$.
   (b) Voor $a_n = \sqrt{n}$, bewijs $\lim_{n\to\infty} (a_{n+1} - a_n) = 0$.
   (c) Is de rij $\{a_n\}$ een Cauchyrij?

3. Zij $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ een rij van strikt positieve getallen. Bewijs dat

$$\limsup_{n\to\infty} a_n^{1/n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

   (Je mag zonder bewijs gebruiken dat voor elk $x > 0$ geldt $\lim_{n\to\infty} x^{1/n} = 1$.)

4. Zij $\{a_n\}$ een dalende rij van positieve getallen zodat $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergeert. Bewijs dat $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$.

5. Zij

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots$$

   (a) Bewijs dat deze reeks convergeert.
   (b) Bewijs dat

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{6} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \cdots = \frac{3}{2}S.$$

   Opmerking: Dit is een herordening van de reeks $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots$, die naar S convergeert.

Uitwerking

1. (a) Voor $x \neq 0$ geldt of $x > 0$ of $x < 0$. In het eerste geval volgt $x^2 = x \cdot x > 0$. In het tweede geval geldt $-x > 0$ en dus $x^2 = (-x)(-x) > 0$.

   (b) Stel er is een ordening $\leq$ zodat $(\mathbb{C}, \leq)$ geordend lichaam is. Voor $i = (0,1) \in \mathbb{C}$ geldt $i^2 = -1 < 0$, wat een tegenspraak met (a) is.

2. (a) Voor $n \to \infty$ geldt $n^{-1} \to 0$, dus $1 + n^{-1} \to 1$. Met het feit dat $x \mapsto \sqrt{x}$ strikt stijgend is en $\sqrt{1} = 1$ volgt dat $\sqrt{1 + n^{-1}} \to 1$. Nu geldt

$$\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right)\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right) = \left(1+\frac{1}{n}\right) - 1 = \frac{1}{n}.$$

   Dus

$$n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right)\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right) = 1,$$

   en met $\sqrt{1+n^{-1}} + 1 \to 2$ volgt

$$n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right) \to \frac{1}{2}.$$

   (b) We hebben

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right) = \frac{1}{\sqrt{n}}\left[n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right)\right].$$

   Uit (a) weten wij dat de factor $[\cdots]$ naar $\frac{1}{2}$ convergeert. Hiermee is duidelijk dat $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \to 0$.

   Alternatief direct argument:

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \to 0.$$

   (c) Nee, want een Cauchyrij $\{a_n\}$ is begrensd, wat voor $a_n = \sqrt{n}$ duidelijk niet geldt.

3. Schrijf $S = \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Als $S = +\infty$ dan is de bewering trivialerwijze waar. Stel dus $S < \infty$. Dan is de rij $\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\}$ begrensd, dus $M := \sup \frac{a_{n+1}}{a_n} < \infty$. Zij $\varepsilon > 0$. Dan is er een n_0 zodat $n \geq n_0 \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq S + \varepsilon$. Nu

$$a_n^{1/n} = \left(\frac{a_n}{a_{n-1}}\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdots\frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}}\frac{a_{n_0}}{a_{n_0-1}}\cdots\frac{a_2}{a_1}\cdot a_1\right)^{1/n} \leq \left((S+\varepsilon)^{n-n_0}M^{n_0}a_1\right)^{1/n}$$

Dus

$$\begin{aligned}\limsup a_n^{1/n} &\le \limsup \left((S+\varepsilon)^{n-n_0} M^{n_0} a_1\right)^{1/n} \\ &= (S+\varepsilon)\limsup \left((S+\varepsilon)^{-n_0} M^{n_0} a_1\right)^{1/n} = S+\varepsilon.\end{aligned}$$

Dit geldt voor alle $\varepsilon > 0$, dus $\limsup a_n^{1/n} \le S$, en dit was te bewijzen.

4. Convergentie van de reeks $\sum_n a_n$ is per definitie convergentie van de rij $\{S_n\}$, waar $S_n = a_0 + \cdots + a_n$. Deze rij convergeert d.e.s.d.a. als hij Cauchyrij is, dus d.e.s.d.a. voor elk $\varepsilon > 0$ een n_0 bestaat zodat $n > m \ge n_0 \Rightarrow |S_n - S_m| < \varepsilon$, wat equivalent is aan $\sum_{k=m+1}^n a_k < \varepsilon$. (De absolute waarde tekens mochten wij weglaten omdat $a_n \ge 0$.) Gezien $\{a_n\}$ dalend is geldt $S_n - S_m = \sum_{k=m+1}^n a_k \ge (n-m)a_n$. Dus: Uit convergentie van $\sum a_n$ volgt dat er voor elk $\varepsilon > 0$ een $n_0(\varepsilon)$ is zodat

$$n > m \ge n_0(\varepsilon) \Rightarrow (n-m)a_n \le \sum_{k=m+1}^{n} a_k < \varepsilon.$$

In het bijzonder $n \ge n_0(\varepsilon) \Rightarrow na_n < \varepsilon + n_0 a_n$. Convergentie van $\sum a_n$ impliceert $a_n \to 0$, dus voor $n \ge n_0(\varepsilon)$ groot genoeg geldt $n_0 a_n < \varepsilon$, dus $na_n < 2\varepsilon$. Dus $na_n \to 0$.

5. (a) De reeks $\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ is alternerend en $\frac{1}{n}$ gaat monotoon naar nul. Convergentie volgt dus uit de 'alternating series test'.

(b) We heeben

$$S = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{4N} \frac{(-1)^{n+1}}{n},$$

en

$$\frac{S}{2} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n+1}}{2n} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{2N} \frac{(-1)^{n+1}}{2n}$$

Dus

$$\begin{aligned}S + \frac{S}{2} &= \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{n=1}^{4N} \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \sum_{n=1}^{2N} \frac{(-1)^{n+1}}{2n} \right) \\ &= \lim_{N\to\infty} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{4N}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \cdots - \frac{1}{4N}\right) \\ &= \lim_{N\to\infty} \left(1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{4N-1}\right) - 2\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots - \frac{1}{4N}\right) \\ &= \lim_{N\to\infty} \left(1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{4N-1}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2N}\right)\end{aligned}$$

Voor $N = 2$ is dit $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{4} + \frac{1}{7}$, en voor $N = 3$ is dit

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{6} + \frac{1}{11}.$$

Het is nu duidelijk dat

$$\frac{3}{2}S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{6} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \cdots .$$