Meest gemaakte fouten in de tussentoets Analyse I

Michael Müger
Institute for Mathematics, Astrophysics and Particle Physics
Radboud University Nijmegen, The Netherlands

May 12, 2016

Ik was enigszins geschokt door een aantal fouten die in de tussentoets gemaakt zijn, sommige ervan door bijna iedereen. De volgende lijst heb ik in de hoop gemaakt dat dit helpt om tenminste deze fouten in de toekomst (dus in de echte tentamens!!) te voorkomen.

Maar algemeen geldt de volgende aanbeveling: Als je een bewering maakt die je niet bewijst, denk een ogenblik na of er voor de hand liggende tegenvoorbeelden zijn. Dit kan ook handig zijn als je denkt wel een bewijs voor de bewering te hebben!! (Want bewijzen kunnen fout zijn...)

1. opgave 2(c): Zoals onder (b) gezien geldt $a_{n+1} - a_n \to 0$. Voor een Cauchyrij geldt dit, maar deze uitspraak is zwakker dan de Cauchy eigenschap, waar voor elk $\varepsilon > 0$ een N moet bestaan zodat $n, m \geq N \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon$. Hier is het belangrijk dat niet alleen na $m = n \pm 1$ gekeken wordt!! En in feite is de rij hier niet Cauchy, want een Cauchyrij is begrensd, terwijl $\sqrt{n} \to +\infty$.

2. opgave 3: Ik had aangegeven dat de volgende uitspraak zonder bewijs gebruikt mag worden: Voor elk $x > 0$ geldt $\lim_{n\to\infty} x^{1/n} = 1$. (Dit wordt in mijn uitwerking van de opgave gebruikt.) Bijna iedereen (!) heeft dit "gegeneraliseerd" na de volgende FOUTE uitspraak:

   Als $\{a_n\}$ een rij is met $a_n > 0\ \forall n$ dan geldt $\lim_{n\to\infty} a_n^{1/n} = 1$.

   Dit is totaal fout: Met $a_n = 2^n$ geldt $a_n^{1/n} = 2\ \forall n$, wat duidelijk niet naar 1 convergeert. (Of met $a_n = n^n$ volgt $a_n^{1/n} = n$, wat naar $+\infty$ divergeert.) Het verschil met de correcte uitspraak is natuurlijk dat daar x constant is en dus niet van n afhangt.

   Conclusie: Generaliseringen van correcte uitspraken zijn vaak fout!

3. opgave 3: Heel veel mensen hebben de volgende FOUTE bewering gemaakt (en natuurlijk niet bewezen):

   Als $\{a_n\}$ een rij is die naar $a \in \mathbb{R}$ convergeert dan geldt $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$.

   Tegenvoorbeeld: Zij $a_n = 2^{-n}$. Dan geldt $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}\ \forall n$, wat duidelijk niet naar 1 convergeert, hoewel de limiet $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ bestaat (namelijk $a = 0$).

   Deze fout is iets subtieler dan de voorafgande, en daarom misschien begrijpelijker. Maar toch is dit tegenvoorbeeld voor de hand liggend.

   De redenering achter de foute bewering is deze: Als $a_n \to a$ dan geldt ook $a_{n+1} \to a$ (correct!). Nu volgt $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \frac{a}{a} = 1$ uit de volgende "Stelling": Als $a_n \to a$ en $b_n \to b$ dan geldt $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$. Helaas geldt deze alleen als $b \neq 0$. Zie Garling Theorem 3.2.5(vi). (Hij eist bovendien dat $b_n \neq 0$ voor alle n, maar dit is niet zo essentieel: Uit $b_n \to b$ en $b \neq 0$ volgt dat $b_n \neq 0$ voor alle n vanaf een zeker n_0, en voor convergentie van een rij is alleen relevant wat voor grote n gebeurt.)

4. opgave 4: Uit de convergentie van $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ volgt dat $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, zie Garling Theorem Proposition 4.1.4. (De omkeering hiervan is FOUT: $a_n = 1/n \to 0$, maar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is divergent!) Maar het is FOUT te beweren dat hieruit $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$ volgt. Tegenvoorbeeld: $a_n = 1/n$. Hiermee geldt $a_n \to 0$, terwijl $na_n = 1\ \forall n$, dus $na_n \not\to 0$.

   Het punt is dat uit $a_n \to 0$ niet volgt $a_n b_n \to 0$ voor een willekeurige rij $\{b_n\}$. De conclusie is wel waar als $\{b_n\}$ begrensd is (Garling Theorem 3.2.5(ii)), maar de rij $\{n\}_{n\in\mathbb{N}}$ is duidelijk niet begrensd! (Dit is in essentie dezelfde fout als de voorafgande.)

5. opgave 4: Om te bewijzen dat $na_n \to 0$ kun je niet beginnen met “Stel $na_n \to C$, waar $C \neq 0$”, en dan een tegenspraak construeren. Want uit $na_n \not\to 0$ volgt geenszins dat $na_n \to C$ met $C \neq 0$!! Er zijn rijen die überhaupt niet convergeren, bijv. $\{a_n = (-1)^n\}$. Ook dit had al sinds Calculus 1 duidelijk moeten zijn.

6. Een algemene opmerking: Het is geen goed idee om elk bewijs meteen uit het ongerijmde te proberen. Het is bijna altijd beter om eerst een direct bewijs te proberen. (Zie bijv. de uitwerkingen van opgaven 3 en 4, waar directe bewijzen gegeven worden.)

7. Tenminste sommigen hebben het limietbegrip überhaupt niet begrepen: Uit $a_n > 0\ \forall n$ en $a_n \to a$ volgt geenszins dat $a > 0$. En de redenering “$n + 1 = n$ als $n \to \infty$ omdat $\infty + 1 = \infty$, dus $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \to 0$” slaat helemaal nergens op.

8. opgave 5: Het criterium voor alternerende reeksen (Theorem 4.3.3) is als volgt: Stel (a) $a_n \geq 0\ \forall n$, (b) $a_n \to 0$ en (c) $\{a_n\}$ is dalend, dus $a_{n+1} \leq a_n\ \forall n$. Dan convergeert de reeks $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$. De aanname (a) is er opdat dit überhaupt een alternerende reeks is, en dat (b) noodzakelijk voor convergentie is zal duidelijk zijn. Maar ook de aanname (c) kunnen wij niet weglaten, zoals veel van jullie gedaan hebben!

   Voorbeeld: $a_{2n} = 2/n$ en $a_{2n-1} = 1/n$. Nu geldt $a_n \to 0$, maar NIET $a_{n+1} \leq a_n\ \forall n$, en:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n = -\frac{1}{1} + \frac{2}{1} - \frac{1}{2} + \frac{2}{2} - \frac{1}{3} + \frac{2}{3} - \cdots = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots = +\infty.$$