Radboud Universiteit Nijmegen

Tentamen Analyse 1 WP001B
16 juni 2016, 12:30–15:30 (16:30)

Het gebruik van een rekenmachine, telefoon of tablet is niet toegestaan. U mag geen gebruik maken van aantekeningen of boeken, het boek van Garling ingesloten. Geef precieze argumenten en antwoorden. Maak uw redenering zo helder mogelijk.

---

1. Zij $\{a_n\}_{n\geq 1}$ een rij in $\mathbb{R}$.
   (a) Geef de definities van $\lim_{n\to\infty} a_n$ en $\limsup_{n\to\infty} a_n$ (als deze bestaan).
   (b) Zij $S \in \mathbb{R}$. Geef de noodzakelijke en voldoende conditie (in termen van ε en N) voor $S = \limsup_{n\to\infty} a_n$.
   (c) Bewijs: Als $\{a_n\}$ begrensd is dan is er een deelrij $\{a_{n_k}\}$ die naar $\limsup_{n\to\infty} a_n$ convergeert.
   (d) Formuleer de Stelling van Bolzano en Weierstrass en laat zien hoe deze uit (c) volgt. (Of schets een ander bewijs.)

2. (a) Geef de definitie van een Cauchy-rij (in $\mathbb{R}$).
   (b) Bewijs dat elke Cauchy-rij begrensd is.
   (c) Gebruik (b) en Bolzano-Weierstrass om te bewijzen dat elke Cauchy-rij in $\mathbb{R}$ convergeert.

3. Zij $I \subseteq \mathbb{R}$ en $f : I \to \mathbb{R}$ een functie.
   (a) Definieer continuiteit van f in een punt, continuiteit van f op I, en uniforme continuiteit van f op I.
   (b) Geef een voorbeeld van een functie $\mathbb{R} \supset I \to \mathbb{R}$ die continu is, maar niet uniform continu (met bewijs).
   (c) Zij $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ een continue functie. Gebruik Bolzano-Weierstrass om EEN (je mag kiezen) van de volgende uitspraken te bewijzen:
      – f is begrensd.
      – f is uniform continu.
   (d) BONUS: Bewijs de andere uitspraak uit (c).

Z.O.Z.

4. Stel dat $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ voldoen aan

$$a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{n} + \frac{a_n}{n+1} = 0.$$

   Bewijs dat er een $c \in (0,1)$ is zodat

$$a_0 + a_1 c + \cdots + a_{n-1} c^{n-1} + a_n c^n = 0.$$

   Als je bekende stelling(en) gebruikt, formuleer deze precies.

5. Definieer een functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ door

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & \text{als} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{als} \quad x = 0 \end{cases}$$

   (a) Bewijs dat f oneindig keer differentieerbaar is op $\mathbb{R}$.

   (b) Bewijs dat alle afgeleides $f^{(n)}$ van f nul zijn in $x = 0$.

   (c) Wat betekent (b) voor de Taylorreeks van f rond $x = 0$?

Normering

Opgave	1	2	3	4	5	Gratis	Totaal
Punten	10	8	10	8	9	5	50

Het onafgeronde tentamencijfer T is het totaal aantal behaalde punten gedeeld door 5.

Uitwerking

1. (a) De rij $\{a_n\}$ convergeert naar $A \in \mathbb{R}$ als voor elk $\varepsilon > 0$ een $N \in \mathbb{N}$ bestaat zodat $n \geq N \Rightarrow |a_n - A| < \varepsilon$. (Als zo'n A bestaat dan is die uniek.)

   En $\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sup\{a_m \mid m \geq n\}$. (Gezien de rij $n \mapsto \sup\{a_m \mid m \geq n\}$ dalend is geldt ook $\limsup_{n\to\infty} a_n = \inf\{\sup\{a_m \mid m \geq n\} \mid n \in \mathbb{N}\}$.)

   (b) Er geldt $S = \limsup_{n\to\infty} a_n$ d.e.s.d.a.

   (i) voor elk $\varepsilon > 0$ is er een $N \in \mathbb{N}$ zodat $n \geq N \Rightarrow a_n < S + \varepsilon$, en

   (ii) voor elk $\varepsilon > 0$ en $N \in \mathbb{N}$ is er een $n \in \mathbb{N}$ zodat $n \geq N$ en $a_n > S - \varepsilon$.

   (c) We korten af: $S = \limsup_{n\to\infty} a_n$. Uit (bi) volgt dat er een m_1 is zodat $a_{m_1} < S+1$ (en voor alle grotere indices). Uit (bii) volgt dat er een $n_1 \geq m_1$ is zodat $a_{n_1} > S - 1$. Er geldt dus $S - 1 < a_{n-1} < S + 1$, ofwel $|a_{n_1} - S| < 1$. Uit (bi) volgt dat er een m_2 is met $a_{m_2} < S + 1/2$, waar wij m_2 zo kunnen kiezen dat $m_2 > n_1$, wat wij ook doen. Met (bii) is er een $n_2 \geq m_2$ zodat $a_{n_2} > S - 1/2$. Gezien nog steeds geldt $a_{n_2} < S + 1/2$ hebben wij $|a_{n_2} - S| < 1/2$. Zo doorgaand construeren we $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ met $|a_{n_k} - S| < 1/k$. Nu is $\{a_{n_k}\}$ een deelrij van $\{a_n\}$ die naar S convergeert.

   (d) De constructie in (c) werkt voor elke begrensde rij $\{a_n\}$. Dus elke begrensde rij heeft een deelrij die naar $\limsup a_n$ convergeert. Dit impliciert duidelijk de stelling van Bolzano en Weierstrass, namelijk: Elke begrensde rij heeft een convergente deelrij.

2. (a) Een rij $\{a_n\}$ in $\mathbb{R}$ heet Cauchy-rij als er voor elk $\varepsilon > 0$ een $N \in \mathbb{N}$ is zodat $n, m \geq N \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon$.

   (b) We kunnen een $N \in \mathbb{N}$ kiezen zodat $n \geq N \Rightarrow |a_n - a_m| < 1$. Met name $n \geq N \Rightarrow |a_n - a_N| < 1$. Dus $n \geq N \Rightarrow |a_n| \leq |a_N| + 1$. Met $C = \max(|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{N-1}|, |a_N| + 1) < \infty$ volgt $|a_n| \leq C$ voor alle $n \in \mathbb{N}$, dus de begrensdheid van $\{a_n\}$.

   (c) Zij $\{a_n\}$ een Cauchy-rij. Uit (b) volgt dat deze begrensd is. De stelling van Bolzano-Weierstrass impliceert nu dat de rij $\{a_n\}$ een deelrij $\{a_{n_k}\}$ heeft die convergeert, zeg naar A. We beweren dat de hele rij $\{a_n\}$ naar A convergeert. Zij $\varepsilon > 0$. De rij $\{a_n\}$ is Cauchy, er is dus een N zodat $n, m \geq N \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon/2$. En er is een $K \in \mathbb{N}$ zodat $k \geq K \Rightarrow |a_{n_k} - A| < \varepsilon/2$. Uit $n_k \to \infty$ volgt dat wij een $k \geq K$ kunnen vinden zodat $n_k \geq N$. Als nu $n \geq N$ dan $n, k \geq N$, dus

   $$|a_n - A| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

   Dus $a_n \to A$.

3. (a) f is continu in $x \in I$ als voor elk $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zodat $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ voor elk $x' \in I$ met $|x - x'| < \delta$. f is continu op I als f continu is in elk $x \in I$. f is uniform continu op I als er voor elk $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ is zodat $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ voor alle $x, x' \in I$ met $|x - x'| < \delta$.

(b) Als $I = (0,1)$ dan is $f : I \to \mathbb{R}, x \mapsto 1/x$ continu, maar niet uniform continu. Bewijs: $x \mapsto x$ is duidelijk continu. Dan volgt continuiteit van $x \mapsto 1/x$ op I uit het feit dat $x \neq 0$ op I. (Stelling in het boek.) Maar f is niet uniform continu: Zij $\delta \in (0,1)$, en bekijk $0 < x < \delta$, $x' = x/2$. Dan is $|x - x'| < \delta/2 < \delta$. Maar $|f(x) - f(x')| = |\frac{1}{x} - \frac{1}{x/2}| = \frac{1}{x}$, en dit kan men willekeurig groot maken door met x naar nul te gaan. Het is dus niet waar dat we voor elk $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ kunnen vinden zodat $|x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

(c)+(d) Bewijs van begrensdheid van f: Stel f is onbegrensd, er is dus geen $C > 0$ zodat $|f(x)| \leq C$ voor alle $x \in [a,b]$. Dan kunnen wij voor elk $n \in \mathbb{N}$ een $x_n \in [a,b]$ vinden zodat $|f(x_n)| > n$. Dit geeft een rij $\{x_n\}$ in $[a,b]$. Deze heeft dankzij Bolzano-Weierstrass een deelrij $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ die naar een zeker $x_0 \in [a,b]$ convergeert. Continuiteit van f impliceert dat de rij $\{f(x_{n_k})\}$ naar $f(x_0)$ convergeert, met name dus begrensd is. Maar dit is duidelijk een tegenspraak met $|f(x_{n_k})| > n_k$ en $n_k \to \infty$ als $k \to \infty$. f moet dus begrensd zijn.

Bewijs an uniforme continuiteit: Stel f is niet uniform continu. Er is dus een $\varepsilon > 0$ waarvoor geen $\delta > 0$ bestaat zodat $|x-x'| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(x')| < \varepsilon$. De keuze van zo'n ε betekent dat wij voor elk $\delta > 0$ punten $x, x' \in [a,b]$ kunnen vinden met $|x - x'| < \delta$, maar $|f(x) - f(x')| \geq \varepsilon$. In het bijzonder kunnen wij voor elk $n \in \mathbb{N}$ punten $x_n, y_n \in [a,b]$ vinden met $|x_n - y_n| < 1/n$ en $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$. De rij $\{x_n\}$ leeft in $[a,b]$, is dus begrensd, en met Bolzano-Weierstrass is er een deelrij $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ die convergeert, zeg naar $x_0 \in [a,b]$. Uit $|x_n - y_n| < 1/n$ volgt dan dat ook de deelrij $\{y_{n_k}\}$ van $\{y_n\}$ naar x_0 convergeert. f is continu, dus $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0) = \lim_{k\to\infty} f(y_{n_k})$. Maar dit betekent dat de rij $\{f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})\}_{k\to\infty}$ naar nul convergeert. Dit is een tegenspraak met de constructie, want $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon > 0$ voor alle n. Dus: f moet uniform continu zijn.

4. Definieer de functies

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n, \\ g(x) &= a_0 x + \frac{a_1 x^2}{2} + \cdots + \frac{a_n x^{n+1}}{n+1}. \end{aligned}$$

Het is duidelijk dat $g' = f$. (Hiervoor hebben wij geen integraalrekening nodig, maar alleen de kennis dat $(x^n)' = nx^{n-1}$.) Nu geldt duidelijk $g(0) = 0$ en $g(1) = a_0 + \frac{a_1}{2} + \cdots + \frac{a_n}{n+1} = 0$, wegens de aanname. Het is duidelijk dat f continu is op $[0,1]$ en differentieerbaar op $(0,1)$ (in feite op heel $\mathbb{R}$). We kunnen dus het Lemma van Rolle (of de middenwaardestelling, waarvan Rolle een speciaal geval is) op g en het interval $[0,1]$ toepassen en concluderen: Er is een $c \in (0,1)$ zodat $g'(c) = 0$. Maar dit betekent $f(c) = 0$, dus $a_0 + a_1 c + \cdots + a_{n-1}c^{n-1} + a_n c^n = 0$, zoals gewenst.

5. (a)+(b) In $x \neq 0$ is f duidelijk continu, en als $x \to 0$ dan $-\frac{1}{x^2} \to -\infty$, dus $f(x) \to 0$,

zodat f ook in $x = 0$ continu is. Voor $x \neq 0$ geldt

$$f'(x) = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)' = -2x^{-3}\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right),$$

wat voor $x \neq 0$ duidelijk bestaat en continu is. Het is duidelijk dat $\lim_{x\to 0} f'(x) = 0$, want $\exp(-1/x^2)$ gaat veel harder naar nul dan x^{-3} divergeert. Aan de andere kant,

$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\exp\left(-\frac{1}{h^2}\right)}{h} = 0.$$

Dus f' is continu op heel $\mathbb{R}$ met $f'(0) = 0$. (Het is dus niet voldoende om alleen te zeggen dat $\lim_{x\to 0} f'(x)$ bestaat: Deze limiet moet ook gelijk zijn aan $f'(0)$.) Verder hebben wij voor $x \neq 0$

$$f''(x) = \big((-2)(-3)x^{-4} + (-2x^{-3})^2\big)\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right),$$

wat weer een continue functie is voor $x \neq 0$. En net als voor f zien we dat $f''(0) = \lim_{h\to 0} f'(h)/h = 0$. Dus f' is continu differentieerbaar op $\mathbb{R}$ met $f''(0) = 0$. Algemeen zien wij met inductie dat $f^{(n)}(x)$ een product is van $\exp(-1/x^2)$ met een lineaire combinatie van eindig veel negative machten van x. Dit is voor $x \neq 0$ een continue functie en $\lim_{x\to 0} f^{(n)}(x) = 0 = (f^{(n-1)})'(0)$. Dus $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ met $f^{(n)}(0) = 0\ \forall n = 0, 1, 2, \ldots$.

(c) Met (b) zijn de afgeleides van f alle nul in $x_0 = 0$. De Taylorreeks voor f rond $x = 0$ is dus $0 + 0\cdot x + \frac{0}{2!}\cdot x^2 + \cdots$. De nulreeks is natuurlijk voor alle $x \in \mathbb{R}$ convergent naar de nulfunctie. Maar deze komt alleen voor $x = 0$ met de gegeven functie overeen. Dus: Zelf als een functie in een punt x_0 oneindig geer differentieerbaar is en de Taylorreeks $\sum_k \frac{f^{(k)}}{k!}(x - x_0)^k$ convergentiestraal grooter nul heeft hoeft de reeks buiten $x = x_0$ niets met f te maken te hebben.

(Met meer werk kan men ook een oneindig keer differentieerbare functie maken wiens Taylorreeks rond een gegeven punt convergentiestraal nul heeft!)