

1. Zij A, B, C, D niet-lege verzamelingen. Bewijs dat $A \times B \subset C \times D$ geldt dan en slechts dan als $A \subset C$ en $B \subset D$. Blijft dit waar als (een of meerdere) verzameling leeg mag zijn?

Oplossing:

- (i) Stel $A \subset C$ en $B \subset D$. Zij $(a, b) \in A \times B$. Dit betekent $a \in A, b \in B$. Met de aanname volgt $a \in C, b \in D$, dus $(a, b) \in C \times D$. Dus $A \times B \subset C \times D$.
- (ii) Stel $A \times B \subset C \times D$. Zij $a \in A$. We hebben $B \neq \emptyset$ aangenomen, kunnen dus een $b \in B$ kiezen. Dan $(a, b) \in A \times B$, en met de aanname volgt $(a, b) \in C \times D$. Dus $a \in C$ (en $b \in D$, maar dat interesseert ons niet). Dus $A \subset C$. Op dezelfde manier zien we dat $B \subset D$. (Hiervoor hebben wij $A \neq \emptyset$ nodig!)
- (iii) NEE! Als $A = \emptyset$ dan is $A \times B = \emptyset$ voor elke verzameling B . De inclusie $A \times B \subset C \times D$ is dus waar voor willekeurig B, C, D . Dus ook als $B \not\subset D$. De implicatie $A \times B \subset C \times D \Rightarrow A \subset C$ en $B \subset D$ is dus fout als A (of B) leeg is.

2. Zij $A, B \subset \mathbb{R}$ begrensde verzamelingen. Definieer

$$A - B = \{x - y \mid x \in A, y \in B\}.$$

Bewijs dat $A - B$ begrensd is en druk $\inf(A - B)$ en $\sup(A - B)$ uit door $\inf A, \sup A, \inf B, \sup B$. Bewijs uw beweringen.

Oplossing: A en B zijn begrensd. Er zijn dus reële getallen $M, N \geq 0$ zodat $|a| \leq M \forall a \in A$ en $|b| \leq N \forall b \in B$. Dit is equivalent aan

$$-M \leq a \leq M, \quad -N \leq b \leq N \quad \forall a \in A, b \in B.$$

Als we deze ongelijkheden bij elkaar optellen krijgen wij

$$-(M + N) \leq a + b \leq M + N \quad \forall a \in A, b \in B.$$

Dus $A + B$ is begrensd. Nu gebruiken wij de volgende feiten uit boek en hoorcollege:

$$\begin{aligned} \sup(A + B) &= \sup(A) + \sup(B), \\ \inf(A + B) &= \inf(A) + \inf(B), \\ \sup(-A) &= -\inf(A). \end{aligned}$$

(Dit mocht van mij zonder bewijs gebuikt worden, want het was bekend!) Nu:

$$\begin{aligned} \sup(A - B) &= \sup(A + (-B)) = \sup(A) + \sup(-B) = \sup(A) - \inf(B), \\ \inf(A - B) &= \inf(A + (-B)) = \inf(A) + \inf(-B) = \inf(A) - \sup(B). \end{aligned}$$

3. Zij $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ een (formelle) reeks, waar de a_n reële getallen zijn, en $S_N = \sum_{k=0}^N a_k$ de rij van partiële sommen. Definieer

$$C_m = \frac{\sum_{k=0}^{m-1} S_k}{m}.$$

- (i) Bewijs dat

$$C_m = \sum_{k=0}^{m-1} a_k \left(1 - \frac{k}{m}\right) = S_{m-1} - \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} k a_k.$$

- (ii) De reeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ heet Cesàro-sommeerbaar met Cesàro-som $L \in \mathbb{R}$ d.e.s.d.a. $\lim_{m \rightarrow \infty} C_m = L$. Bewijs: Als $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ naar L convergeert, dan is $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ Cesàro-sommeerbaar met Cesàro som L .
- (iii) Geef een voorbeeld voor een reeks die niet convergeert maar wel Cesàro sommeerbaar is.

Oplossing:

- (i) Wij rekenen:

$$C_m = \frac{\sum_{k=0}^{m-1} S_k}{m} = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} S_k = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{\ell=0}^k a_{\ell}$$

In de dubbele som aan de rechterkant komt elk paar (k, ℓ) een keer voor dat aan $0 \leq \ell \leq k \leq m-1$ voldoet. Daarom kunnen wij $\sum_{k=0}^{m-1} \sum_{\ell=0}^k$ door $\sum_{\ell=0}^{m-1} \sum_{k=\ell}^{m-1}$ vervangen en krijgen

$$\begin{aligned} C_m &= \frac{1}{m} \sum_{\ell=0}^{m-1} \sum_{k=\ell}^{m-1} a_{\ell} = \frac{1}{m} \sum_{\ell=0}^{m-1} a_{\ell} \sum_{k=\ell}^{m-1} 1 = \frac{1}{m} \sum_{\ell=0}^{m-1} a_{\ell} (m - \ell) = \sum_{\ell=0}^{m-1} a_{\ell} \frac{m - \ell}{m} \\ &= \sum_{\ell=0}^{m-1} a_{\ell} \left(1 - \frac{\ell}{m}\right) = \sum_{\ell=0}^{m-1} a_{\ell} - \sum_{\ell=0}^{m-1} a_{\ell} \frac{\ell}{m} = S_{m-1} - \frac{1}{m} \sum_{\ell=0}^{m-1} \ell a_{\ell} \end{aligned}$$

zoals gewenst.

- (ii) Stel $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ convergeert naar L . Per definitie betekent dit $\lim_{m \rightarrow \infty} S_m = L$. Wij willen bewijzen dat $\lim_{m \rightarrow \infty} C_m = L$. Met de onder (i) bewezen formule is dit equivalent aan

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} k a_k = 0. \quad (1)$$

Per aanname is $\sum_n a_n$ convergent. Het Cauchy criterium zegt ons dat voor elk $\varepsilon > 0$ een $N \in \mathbb{N}$ bestaat zodat

$$n, m \geq N \Rightarrow \left| \sum_{k=n}^m a_k \right| < \varepsilon \quad (2)$$

Zij dus $\varepsilon > 0$. Kies N zodat (2) geldt. Voor $m \geq N$ hebben wij

$$\frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m-1} ka_k = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{N-1} ka_k + \frac{1}{m} \sum_{k=N}^{m-1} ka_k.$$

De eerste term aan de rechterkant is een constante gedeeld door m , er is dus een N' zodat die term kleiner is dan ε mits $m \geq N'$. De tweede term schrijven we als

$$\frac{1}{m} \sum_{k=N}^{m-1} ka_k = \frac{1}{m} \left(N \sum_{k=N}^{m-1} a_k + \sum_{k=N+1}^{m-1} a_k + \sum_{k=N+2}^{m-1} a_k + \cdots + \sum_{k=m-1}^{m-1} a_k \right)$$

Met de driehoeksongelijkheid hebben we

$$\left| \frac{1}{m} \sum_{k=N}^{m-1} ka_k \right| \leq \frac{1}{m} \left(N \left| \sum_{k=N}^{m-1} a_k \right| + \left| \sum_{k=N+1}^{m-1} a_k \right| + \left| \sum_{k=N+2}^{m-1} a_k \right| + \cdots + \left| \sum_{k=m-1}^{m-1} a_k \right| \right)$$

Dankzij (2) is elk van de uitdrukkingen $|\cdots| \leq \varepsilon$, dus

$$\left| \frac{1}{m} \sum_{k=N}^{m-1} ka_k \right| \leq \frac{1}{m} (N\varepsilon + \varepsilon + \cdots + \varepsilon) = \frac{(N + m - N - 1)\varepsilon}{m} \leq \varepsilon.$$

Dus: Als $m \geq \max(N, N')$ dan geldt $|m^{-1} \sum_{k=1}^{m-1} ka_k| \leq 2\varepsilon$. Gezien ε willekeurig was hebben wij (1) bewezen.

- (iii) Zij $a_n = (-1)^n$. Dus $a_0 = a_2 = \cdots = 1$ en $a_1 = a_3 = \cdots = -1$. Dan is $S_0 = 1, S_1 = 0, S_2 = 1, \dots$. Dus $S_{2n} = 1, S_{2n+1} = 0 \forall n$. (Dit geloof ik ook zonder inductie!) De reeks $\sum_n a_n$ convergeert dus niet. Aan de andere kant,

$$C_{2n} = \frac{S_0 + \cdots + S_{2n-1}}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}, \quad C_{2n+1} = \frac{S_0 + \cdots + S_{2n}}{2n+1} = \frac{n+1}{2n+1},$$

en het is duidelijk dat $\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = \frac{1}{2}$. De reeks $\sum_n a_n$ is dus Cesàro-sommeerbaar met Cesàro-som $\frac{1}{2}$.

4. Is de volgende bewering waar? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.

Zij $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ een rij reële getallen zodanig dat $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Dan is de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ convergent.

Oplossing: Dit is natuurlijk fout. Kies $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$ met $0 < \alpha \leq 1/2$. Dan geldt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, maar

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2\alpha}} = \infty,$$

want $2\alpha \leq 1$.