Analytische Mechanica:
tentamen 19 Januari 2009

Pagina niet omdraaien tot ik het zeg.

- Je mag gebruik maken van een (grafische) rekenmachine.
- Het gebruik van boeken, ander geschreven materiaal en mobiele telefoons is verboden gedurende het tentamen.
- Schrijf je naam en studentnummer op elk vel. Geef duidelijk het nummer van de opgave aan.
- Schrijf je naam en studentnummer ook op deze pagina van de opgaven en geef het terug samen met je uitwerking als je weg gaat.
- Het tentamen duurt drie uur. Het eerste deel bestaat uit vragen en het tweede deel uit opgaven.
- Beantwoord eerst **alle** vragen. De opgaven tellen alleen mee als **alle** vragen beantwoord zijn. Als je het aantwoord naar een vraag niet weet, schrijf "Ik weet het antwoord niet'.
- Als je alle vragen hebt beantwoord, maak dan de opgaven zover je kan.
- Bedenk dat niet alleen je eindantwoord, maar ook de berekening in zijn geheel belangrijk is. Dus probeer in een duidelijke en overzichtelijke manier je berekening weer te geven. Schrijf dus niet alleen formules op, maar leg ook uit wat je doet zodat ik, als je antwoord fout is, tenminste kan achterhalen of je op het goede spoor zat.
- De getallen in vierkante haakjes geven het maximum aantal punten voor ieder vraag en opgave aan. Onvolledige aantwoorden leveren relatief weinig punten op.

Vragen

1)[0.5] Het theorema van Emma Noether gaat over behoudswetten. Wat zegt dit theorema?

2)[0.2] Zijn in het Hamilton-formalisme de coördinaten en momenta $\mathbf{q}$ en $\mathbf{p}$ afhankelijk of onafhankelijk van elkaar? En zijn $\mathbf{q}$ en $\dot{\mathbf{q}}$ in het Lagrange-formalisme afhankelijk of onafhankelijk van elkaar?

3)[0.1] Geef de definitie van het zwaartepunt.

4)[0.2] De hoeksnelheid kan als een vector $\boldsymbol{\omega}$ geschreven worden. Hoe schrijf je de snelheid van een punt $\mathbf{r}$ op een vast lichaam roterende met hoeksnelheid $\boldsymbol{\omega}$ in termen van $\mathbf{r}$ en $\boldsymbol{\omega}$?

5)[0.1] Is de oplossing van de Hamilton-vergelijkingen hetzelfde als die van de Newtoniaanse bewegingsvergelijkingen?

6)[0.5] a) Wat is het Hamilton-principe? b) Via het Hamilton-principe wordt de genererende functie voor kanonieke transformaties geïntroduceerd. Op basis van welke redenering is dit gedaan?

7)[0.2] Wat is λ en wat is $f(x)$ in de zogeheten gemodificeerde Lagrange vergelijking $\partial\mathcal{L}/\partial x + \lambda \partial f/\partial x = d/dt(\partial\mathcal{L}/\partial\dot{x})$?

Opgave 8 [2.0]

Een puntdeeltje met constante massa m glijdt wrijvingsloos onder de invloed van de zwaartekracht langs een spiraal. In cylindercoördinaten $((r, \theta, z)$ met z langs de verticaal) wordt de spiraal gegeven door $r = R$ en $\theta = kz$, met R en k constant.

(a) Geef aan hoeveel gegeneraliseerde coördinaten nodig zijn om dit probleem op te lossen. Welke is (zijn) het meest geschikt?

(b) Schrijf de Lagrangiaan op.

(c) Schrijf de Hamiltoniaan op.

(d) Schrijf de Hamilton-vergelijkingen op. Los ze op en vergelijk de beweging met die van een vallend lichaam.

Opgave 9 [2.0]

Een puntdeeltje beweegt langs een rechte lijn (1-dimensionale beweging) onder de invloed van een conservatieve kracht veroorzaakt door de potentiële energie

$$V(x) = V_0 x^2 e^{-\alpha x^2}$$

(a) Schrijf de Lagrangiaan op. Is de totale energie E behouden?

(b) Schets de potentiële energie $V(x)$. Geef de punten van (stabiel of instabiel) evenwicht en de corresponderende waarden van $V(x)$ aan.

(c) Teken enkele fase portretten, namelijk krommen met constante energie in het $(x, \dot{x})$ vlak, en beschrijf het karakter van de beweging. Wordt voor deze potentiaal het karakter van de beweging alleen bepaald door de energie of ook door iets anders?

Opgave 10 [2.0]

Twee puntdeeltjes met massa's m_1 en m_2 zijn verbonden met een touw van lengte l. Deeltje 1 beweegt zonder wrijving op een horizontale tafel. Het touw loopt horizontaal tot het einde van de tafel waar het over een katrol naar beneden hangt. Deeltje 2 beweegt natuurlijk onder invloed van de zwaartekracht.

(a) Laat x en y de afstanden van respectievelijk deeltje 1 en 2 tot de katrol. Schrijf de vergelijking van de randvoorwaarden op.

(b) Schrijf de Lagrangiaan van het systeem op.

(c) Schrijf de twee gemodificeerde Lagrange-vergelijkingen voor x and y op en bereken de multiplicator van Lagrange (hint: gebruik de vergelijking van de randvoorwaarden om een relatie tussen $\ddot{x}$ en $\ddot{y}$ af te leiden)

(d) Bereken de kracht van de randvoorwaarden op m_2 en verklaar zijn richting.

Opgave 11 [2.2]

Beschouw een dunne (2-dimensionale) rechthoekige plaat met zijden a en b en massa M. De massa is gelijkmatig (homogeen) verdeeld over de plaat. Werk met een lichaamsvast assenstelsel waarvan de oorsprong samenvalt met het zwaartepunt van de plaat.

(a) Beredeneer in welke richtingen de hoofdassen van dit lichaam liggen.

(b) Laat zien dat de hoofdtraagheidsmomenten worden gegeven door

$$\frac{1}{12}Ma^2 \quad , \quad \frac{1}{12}Mb^2 \qquad \text{en} \qquad \frac{1}{12}M(a^2+b^2)$$

(c) Bereken het krachtmoment dat nodig is om de plaat met constante hoeksnelheid te laten roteren rond een diagonaal.

(d) Waarom verdwijnt dit krachtmoment als $a = b$?

Nuttige formule $\left(\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right)_{inertial} = \left(\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right)_{body} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}$

Analytische Mechanica:
tentamen 19 Januari 2009

Note Title 1/16/2009

- Je mag gebruik maken van een (grafische) rekenmachine.
- Het gebruik van boeken, ander geschreven materiaal en mobiele telefoons is verboden gedurende het tentamen.
- Schrijf je naam en studentnummer op elk vel. Geef duidelijk het nummer van de opgave aan.
- Schrijf je naam en studentnummer ook op deze pagina van de opgaven en geef het terug samen met je uitwerking als je weg gaat.
- Het tentamen duurt drie uur. Het eerste deel bestaat uit vragen en het tweede deel uit opgaven.
- Beantwoord eerst alle vragen. De opgaven tellen alleen mee als alle vragen beantwoord zijn. Als je het aantwoord naar een vraag niet weet, schrijf "Ik weet het antwoord niet'.
- Als je alle vragen hebt beantwoord, maak dan de opgaven zover je kan.
- Bedenk dat niet alleen je eindantwoord, maar ook de berekening in zijn geheel belangrijk is. Dus probeer in een duidelijke en overzichtelijke manier je berekening weer te geven. Schrijf dus niet alleen formules op, maar leg ook uit wat je doet zodat ik, als je antwoord fout is, tenminste kan achterhalen of je op het goede spoor zat.
- De getallen in vierkante haakjes geven het maximum aantal punten voor ieder vraag en opgave aan. Onvolledige aantwoorden leveren relatief weinig punten op.

Vragen

1)[0.5] Het theorema van Emma Noether gaat over behoudswetten. Wat zegt dit theorema?

For every transformation for which the Lagrangian is invariant, there is a conserved quantity.

We have seen:

- conservation of momentum related to invariance of L for changes of the related variable q since q does not appear in L
- conservation of total momentum for spatial translation invariance
- conservation of energy for time invariance

2)[0.2] Zijn in het Hamilton-formalisme de coördinaten en momenta q en p afhankelijk of onafhankelijk van elkaar? En zijn q en $\dot{q}$ in het Lagrange-formalisme afhankelijk of onafhankelijk van elkaar?

q and p are independent variables, both given by integration of the derivatives of the Hamiltonian via de Hamilton equations. On the contrary, in the Lagrangian approach, $\dot{q}$ can be calculated as $\frac{dq}{dt}$, once $q(t)$ is known.

3)[0.1] Geef de definitie van het zwaartepunt.

$$\vec{R}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{r}_\alpha \qquad \text{or} \qquad \frac{1}{M} \int \vec{r}\, dm$$

4)[0.2] De hoeksnelheid kan als een vector ω geschreven worden. Hoe schrijf je de snelheid van een punt r op een vast lichaam roterende met hoeksnelheid ω in termen van r en ω ?

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

5)[0.1] Is de oplossing van de Hamilton-vergelijkingen hetzelfde als die van de Newtoniaanse bewegingsvergelijkingen?

Yes, Newton, Lagrange and Hamilton are equivalent and derived one from the other. For each situation one or the other approach can be more convenient

6)[0.5] a) Wat is het Hamilton-principe? b) Via het Hamilton-principe wordt de genererende functie voor kanonieke transformaties geïntroduceerd. Op basis van welke redenering is dit gedaan?

a) $S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}\, dt$ stationary along the motion

$\delta S = 0$

b) A canonical transformation should be such that the Hamilton principle applies also for the transformed Lagrangian. This is the case if the two Lagrangians in old and new variables differ at most by the total time derivatives $\frac{dF}{dt}$. F is called the generating function of the canonical transformation.

7)[0.2] Wat is λ en wat is $f(x)$ in de zogeheten gemodificeerde Lagrange vergelijking $\partial\mathcal{L}/\partial x + \lambda \partial f/\partial x = d/dt(\partial\mathcal{L}/\partial\dot{x})$?

λ is de multiplicator van Lagrange

$f(x)$ is de vergelijking van de rand voorwaard (b.v. $x+y=\ell$).

Deze vraag was bedoeld als hulp bij opgave 10.

Summary points for questions

1	0.5	Noether
2	0.2	q,p $q,\dot{q}$
3	0.1	CM
4	0.2	$\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r}$
5	0.1	Ham – Newton
6	0.5	$\delta S=0$ dF/dt
7	0.2	λ, $f(x)$
	1.8	

Opgave 8 [2.0]

Een puntdeeltje met constante massa m glijdt wrijvingsloos onder de invloed van de zwaartekracht langs een spiraal. In cylindercoördinaten $((r, \theta, z)$ met z langs de verticaal) wordt de spiraal gegeven door $r = R$ en $\theta = kz$, met R en k constant.

(a) Geef aan hoeveel gegeneraliseerde coördinaten nodig zijn om dit probleem op te lossen. Welke is (zijn) het meest geschikt?

(b) Schrijf de Lagrangiaan op.

(c) Schrijf de Hamiltoniaan op.

(d) Schrijf de Hamilton-vergelijkingen op. Los ze op en vergelijk de beweging met die van een vallend lichaam.

a) $N=1$ freed $3N=3$ $K=2$ constraints

$3N-K=1$ 1 gen. coord is enough.

gravity depends on z and the constraint can be used to express $\vartheta(z)$ so z is a suitable choice

b) $T = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) \underset{\text{in cyl. coord}}{=} \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + \dot{z}^2)$

The constraint makes $\dot{r}=0$ $\dot{\vartheta} = k\dot{z}$ so that

$$T = \frac{1}{2} m \dot{z}^2 (1+k^2R^2) = \frac{1}{2} m \alpha \dot{z}^2 \quad \text{with } \alpha = (1+k^2R^2)$$

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2} m \alpha \dot{z}^2 - mgz \quad \text{with } \alpha = (1+k^2R^2)$$

c) $\mathcal{H} = p_z \dot{z} - \mathcal{L}$

$$p_z = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} = m\alpha \dot{z} \Rightarrow \dot{z} = \frac{p_z}{m\alpha}$$

$$\mathcal{H} = \frac{p_z^2}{m\alpha} - \frac{1}{2} m\alpha \frac{p_z^2}{(m\alpha)^2} + mgz =$$

$$= \frac{p_z^2}{2m\alpha} + mgz$$

(Note: $\mathcal{H}$ is written now in terms of $(q, p) = (z, p_z)$)

d) The Hamilton eq.

$$\dot{z} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_z} = \frac{p_z}{m\alpha} \qquad (1)$$

$$\dot{p}_z = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z} = -mg \qquad (2)$$

from (2)

$$p_z(t) = -mgt + p_z^0$$

in (1)

$$\dot{z} = \frac{1}{m\alpha}\left(-mgt + p_z^0\right) = -\frac{g}{\alpha} t + \frac{p_z^0}{m\alpha}$$

$$\Rightarrow z(t) = -\frac{1}{2}\frac{g}{\alpha} t^2 + \frac{p_z^0}{m\alpha} t + x_0$$

if $R \to 0$ $\alpha = 1$ and we get the solution for a body falling under the influence of gravity.

Opgave 9 [2.0]

Een puntdeeltje beweegt langs een rechte lijn (1-dimensionale beweging) onder de invloed van een conservatieve kracht veroorzaakt door de potentiële energie

$$V(x) = V_0 x^2 e^{-\alpha x^2}$$

met V_0 en α twee constanten > 0.

(a) Schrijf de Lagrangiaan op. Is de totale energie E behouden?

(b) Schets de potentiële energie $V(x)$. Geef de punten van (stabiel of instabiel) evenwicht en de corresponderende waarden van $V(x)$ aan.

(c) Teken enkele fase portretten, namelijk krommen met constante energie in het $(x, \dot{x})$ vlak, en beschrijf het karakter van de beweging. Wordt voor deze potentiaal het karakter van de beweging alleen bepaald door de energie of ook door iets anders?

a) $\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - V(x) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - V_0 x^2 e^{-\alpha x^2}$

The energy is conserved because $\mathcal{L}$ does not depend on time $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$

b) $V(x) = 0$ for $x = 0$

$x \to \pm \infty$

The equilibrium points are for $V' = \frac{dV}{dx} = 0$

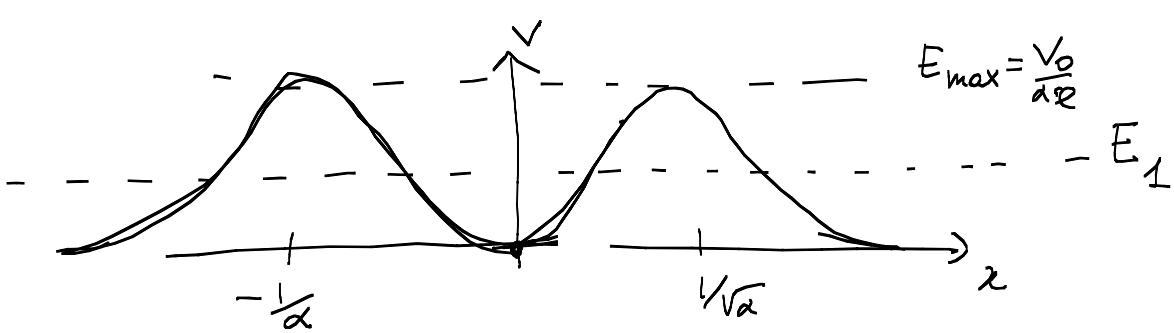
$V'(x) = 2x V_0 e^{-\alpha x^2} + V_0 x^2 (-2\alpha x) e^{-\alpha x^2} =$

$= 2x V_0 e^{-\alpha x^2} (1 - \alpha x^2)$

$V'(x) = 0$ for $x_1 = 0$

$x_{2,3} = \pm \frac{1}{\sqrt{a}}$

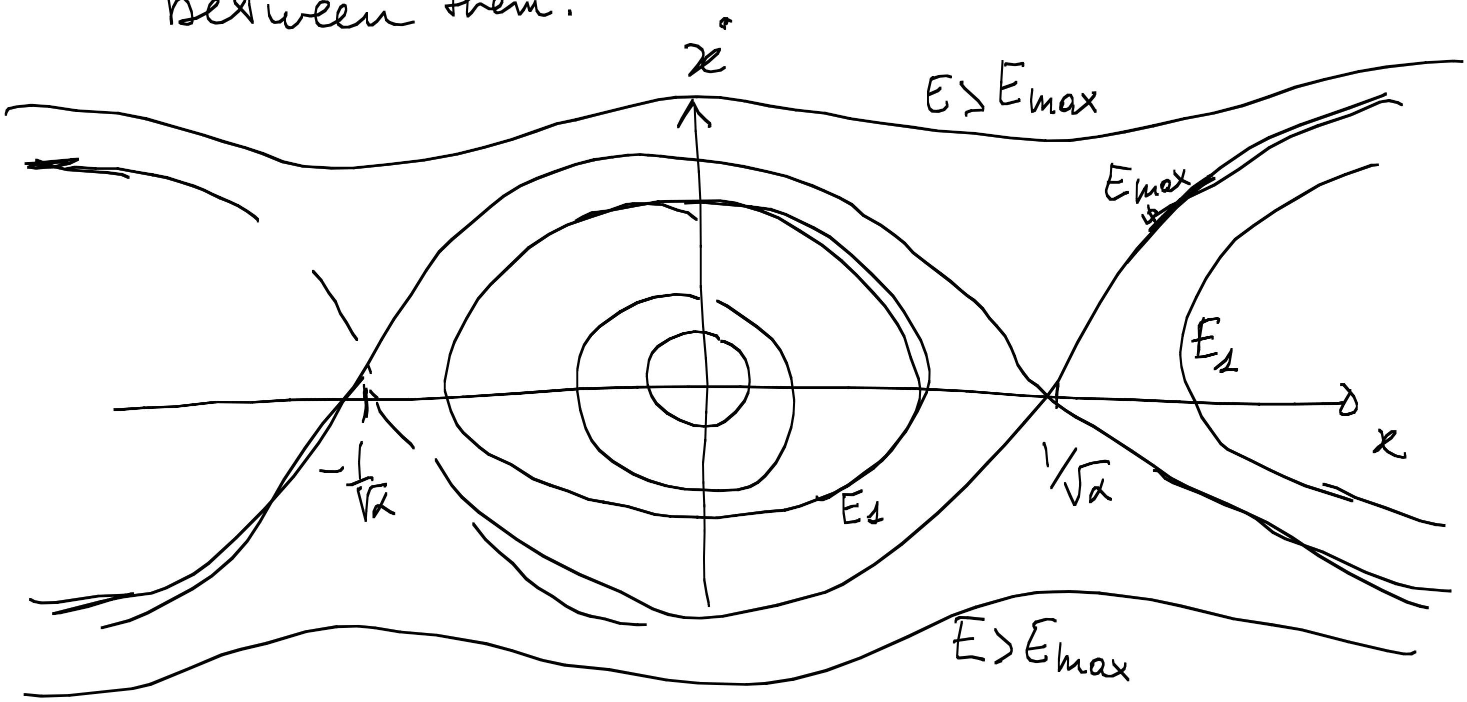
$V(x_1) = 0 \qquad V\left(\pm\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right) = V_0 \frac{1}{\alpha} e^{-1} = \frac{V_0}{\alpha e} > 0$



Fase portretten

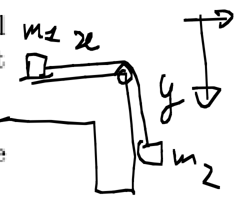
For $0 < E < E_{max} = V(x_{2,3}) = \frac{V_0}{\alpha e}$

the motion is periodic and bounded for $-\frac{1}{\sqrt{\alpha}} < x < \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ and unbounded outside. In this case for the same energy we have different type of motion for different initial conditions. Indeed the initial conditions ~~of~~ 2nd ord. diff eq. (Newton, Lagrange) or of 2 1st ord diff. eq. (~~Hamilton~~) require two initial values. These can be $q, \dot{q}$ but also q (or $\dot{q}$) and another dynamical variable (like $E(q,\dot{q})$) that sets a relation between them.



Opgave 10 [2.0]

Twee puntdeeltjes met massa's m_1 en m_2 zijn verbonden met een touw van lengte l. Deeltje 1 beweegt zonder wrijving op een horizontale tafel. Het touw loopt horizontaal tot het einde van de tafel waar het over een katrol naar beneden hangt. Deeltje 2 beweegt natuurlijk onder invloed van de zwaartekracht.



(a) Laat x en y de afstanden van respectievelijk deeltje 1 en 2 tot de katrol. Schrijf de vergelijking van de randvoorwaarden op.

(b) Schrijf de Lagrangiaan van het systeem op.

(c) Schrijf de twee gemodificeerde Lagrange-vergelijkingen voor x and y op en bereken de multiplicator van Lagrange (hint: gebruik de vergelijking van de randvoorwaarden om een relatie tussen $\ddot{x}$ en $\ddot{y}$ af te leiden)

(d) Bereken de kracht van de randvoorwaarden op m_2 en verklaar zijn richting.

a) $f(x,y) = x + y = l$ (3)

b) $\mathcal{L} = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + m_2 g y$

c) $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right)$ $\qquad \lambda = m_1 \ddot{x}$ (1)

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}}\right)$ $\qquad m_2 g + \lambda = m_2 \ddot{y}$ (2)

From (3)

$x + y = l \Rightarrow \dot{x} + \dot{y} = 0 \qquad \ddot{x} = -\ddot{y}$

(1)+(2) $\quad 2\lambda = m_1 \ddot{x} + m_2 \ddot{y} - m_2 g = (m_1 - m_2)\ddot{x} - m_2 g =$

$= (m_1 - m_2)\frac{\lambda}{m_1} - m_2 g$

Namely

$$2\lambda = \frac{m_1 - m_2}{m_1}\lambda - m_2 g$$

$$\lambda\left(2 - \frac{m_1 - m_2}{m_1}\right) = -m_2 g$$

$$\lambda\left(\frac{2m_1 - m_1 + m_2}{m_1}\right) = -m_2 g$$

$$\lambda = -\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$$

d) The force of the constraint on m_2

$$F^{constr} = \lambda \frac{\partial f}{\partial y} = \lambda = -\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$$

The force is negative because it is directed upwards whereas y is chosen downward.

Opgave 11 [2.2]

Beschouw een dunne (2-dimensionale) rechthoekige plaat met zijden a en b en massa M. De massa is gelijkmatig (homogeen) verdeeld over de plaat. Werk met een lichaamsvast assenstelsel waarvan de oorsprong samenvalt met het zwaartepunt van de plaat.

(a) Beredeneer in welke richtingen de hoofdassen van dit lichaam liggen.

(b) Laat zien dat de hoofdtraagheidsmomenten worden gegeven door

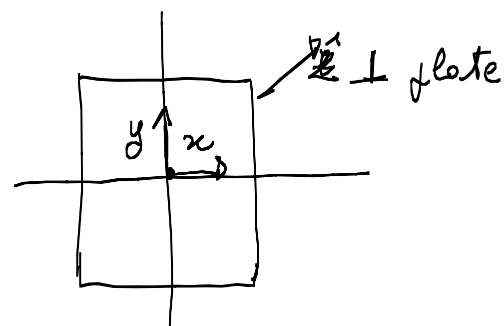
$$\frac{1}{12}Ma^2 \quad , \quad \frac{1}{12}Mb^2 \qquad \text{en} \qquad \frac{1}{12}M(a^2+b^2)$$

(c) Bereken het krachtmoment dat nodig is om de plaat met constante hoeksnelheid te laten roteren rond een diagonaal.

(d) Waarom verdwijnt dit krachtmoment als $a = b$?

Nuttige formule $\left(\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right)_{inertial} = \left(\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right)_{body} + \omega \times \mathbf{L}$

a) There is no mass in one (let's call it z) direction, so $\hat{z}$ is one of the principal axis because
$I_{xz} = I_{yz} = 0$



Let's choose $\hat{x}$ and $\hat{y}$, the other 2 principal axis as in figure. If the terms $I_{xy} = 0$ there are indeed the principal axis because the Tensor of inertia is diagonal

Since we have a homogeneous mass distribution we write the mass density $\frac{M}{ab} = \rho$ to calculate I

$$I_{12} = -\frac{M}{ab}\int_{-b/2}^{b/2} dy\; y \int_{-a/2}^{a/2} dx\; x = 0$$

So $\hat{x}$ and $\hat{y}$ are the principal axis with moment of inertia

$$I_{xx} = \rho \int dA \, (y^2 + \underset{0}{\underset{\shortparallel}{z^2}}) = \qquad \text{with } dA = dx\,dy$$

$$= \frac{M}{ab} \int_{-b/2}^{b/2} dy \, y^2 \int_{-a/2}^{a/2} dx = \frac{M}{ab} \left[\frac{y^3}{3} \right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \cdot a =$$

$$= \frac{M}{b} \left[\left(\frac{b}{2}\right)^3 \frac{1}{3} - \left(-\frac{b}{2}\right)^3 \frac{1}{3} \right] = \frac{M}{b} \, \frac{2 \, b^2}{3 \cdot 8} =$$

$$= \frac{M b^2}{12}$$

Analogously

$$I_{yy} = \frac{M a^2}{12}$$

Moreover we can use the general fact for a 2D system

$$I_{xx} + I_{yy} = \int \rho \, dx \, dy \, (y^2 + \underset{0}{\underset{\shortparallel}{z^2}}) + \int \rho \, dx \, dy \, (x^2 + \underset{0}{\underset{\shortparallel}{z^2}}) =$$

$$= \int \rho \, dx \, dy \, (x^2 + y^2) = I_{zz}$$

So $I_{zz} = \frac{M}{12} (a^2 + b^2)$

c) Rotations around a diagonal

$$\vec{\omega} = c(a\hat{x} \pm b\hat{y}) \qquad \dot{\omega} = 0$$

Using $\left.\frac{dL}{dt}\right)_{in} = \Gamma = \left.\frac{dL}{dt}\right)_{body} + \vec{\omega} \times \vec{L}$

and $\vec{L} = \overleftrightarrow{I}\vec{\omega} \Rightarrow \left.\frac{dL}{dt}\right)_{body} = \overleftrightarrow{I}\,\dot{\vec{\omega}} = 0$

so $\vec{\Gamma} = \vec{\omega} \times \vec{L} =$

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ ca & cb & 0 \\ I_{xx}ca & I_{yy}cb & 0 \end{vmatrix} = \hat{z}\left(c^2ab(I_{yy} - I_{xx})\right)$$

$\vec{\Gamma}$ becomes $= 0$ when $a = b$ and $I_{xx} = I_{yy}$

In that case the inertia tensor becomes degenerate $\lambda_1 = \lambda_2$ and any two perpendicular directions in the plane can be chosen as principal axis for which a rotation at constant angular velocity does not require a torque.