Radboud Universiteit

Tentamen Maattheorie NWI-WB088
14 juni 2021, 12:45–15:45

Het gebruik van een rekenmachine/GR, telefoon, syllabus, boek, aantekeningen e.d. is **niet toegestaan**. Geef precieze argumenten en antwoorden. Zorg dat uw redeneringen en schrijfstijl helder en beknopt zijn. Noteer op **elk vel** uw naam en studentnummer.

---

1. (i) Formuleer het Lemma van Fatou.
   (ii) Formuleer de gedomineerde convergentiestelling.
   (iii) Geef een bewijs van de gedomineerde convergentiestelling door gebruik te maken van het Lemma van Fatou.
   (iv) Zij $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een integreerbare functie met betrekking tot de Lebesguemaat. Definier voor $n \in \mathbb{N}$ de functies $g_n = f\chi_{[-n,n]}$. Laat zien dat $\lim_{n\to\infty} \int |f - g_n|\, d\lambda = 0$.

2. Beschouw de σ-eindige maatruimte $(X, \mathcal{A}, \mu)$.
   (i) Formuleer de stelling van Radon-Nikodym.
   (ii) Veronderstel dat ν en ρ σ-eindige maten zijn op $(X, \mathcal{A})$, die beiden abslouut continu zijn ten opzichte van μ; $\nu \ll \mu$, $\rho \ll \mu$.
      (a) Geef een noodzakelijke en voldoende voorwaarde opdat $\nu \ll \rho$ en bepaal in dat geval de Radon-Nikodym afgeleide. (Hint: beschouw de nulpunten van de Radon-Nikodym afgeleides $\frac{d\nu}{d\mu}$ en $\frac{d\rho}{d\mu}$.)
      (b) Geef de Lebesgue ontbinding van ν ten opzichte van ρ.

3. Zij $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ een kansruimte en laat $X_n\colon \Omega \to \mathbb{R}$ reële stochastische variabelen zijn en veronderstel dat de verdeling $P_{X_n} = P_{X_1}$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.
   (i) Wanneer heten de stochastische variabelen X_1 en X_2 onafhankelijk?
   (ii) Veronderstel dat de rij $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ onafhankelijk is, en definieer de stochastische variabele $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Bepaal $E(S_n)$ en $\mathrm{var}(S_n)$.
   (iii) Formuleer en bewijs de zwakke wet van de grote aantallen. (Hint: schrijf $\{|\frac{1}{n}S_n - E(X_1)| > \varepsilon\}$ als $\{\frac{1}{n^2}|S_n - E(S_n)|^2 > \varepsilon^2\}$ en gebruik de ongelijkheid van Chebyshev.)

ZOZ Het tentamen gaat verder op de achterkant ZOZ

4. Zij $(X, \mathcal{A}, \mu)$ een maatruimte. Definieer $\mu^*(B) = \inf\{\mu(A) \mid A \in \mathcal{A}, B \subset A\}$ voor een deelverzameling $B \subset X$.

   (i) Laat zien dat μ^* een uitwendige maat is. Dus bewijs dat

   (a) $\mu^*(\emptyset) = 0$;

   (b) als $B_1 \subset B_2$ deelverzamelingen van X, dan $\mu^*(B_1) \leq \mu^*(B_2)$;

   (c) voor elke rij $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ van deelverzamelingen van X geldt $\mu^*(\cup_{n\in\mathbb{N}} B_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(B_n)$ (Hint: kies $B_n \subset A_n \in \mathcal{A}$ met $\mu(A_n) \leq \mu^*(B_n) + \varepsilon_n$.)

   (ii) Laat zien dat $\mu^*(B) = \mu(B)$ als $B \in \mathcal{A}$.

   (iii) Zij $\mathcal{M}_{\mu^*} = \{B \subset X \mid \mu^*(C) = \mu^*(C \cap B) + \mu^*(C \cap B^c), \forall C \subset X\}$ de σ-algebra van μ^*-meetbare verzamelingen, dan is $(X, \mathcal{M}_{\mu^*}, \mu^*)$ een maatruimte.

   (a) Laat zien dat $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}_{\mu^*}$.

   (b) Laat zien dat $(X, \mathcal{M}_{\mu^*}, \mu^*)$ een volledige maatruimte is.

   (c) Veronderstel dat μ een eindige maat is. Zij $\mathcal{B}$ een σ-algebra met $\mathcal{A} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{M}_{\mu^*}$, en veronderstel dat $(X, \mathcal{B}, \nu)$ een maatruimte is met $\nu|_{\mathcal{A}} = \mu$. Bewijs dat $\nu = \mu^*|_{\mathcal{B}}$.

Normering						
Opgave	Opgave 1	Opgave 2	Opgave 3	Opgave 4	Gratis	Totaal
Punten	20	20	20	30	10	100

Uitwerkingen en antwoorden

1. (i) Cohn, Theorem 2.4.4.
   (ii) Cohn, Theorem 2.4.5.
   (iii) Cohn, bewijs van Theorem 2.4.5.
   (iv) Merk op dat $\chi_{[-n,n]}$ meetbaar is, en dus is g_n meetbaar voor elke n, en dan geldt dat $\lim_{n\to\infty} g_n = f$ puntsgewijs. Bovendien is $|g_n| \leq f$ en f is integreerbaar, dus dan volgt het uit de gedomineerde convergentiestelling.

2. (i) Cohn, Theorem 4.2.4.
   (ii) (a) Volgens de Radon-Nikodym stelling bestaan er unieke μ-a.e. nietnegatieve functies f en g zodanig dat

$$\nu(A) = \int_A f \, d\mu, \qquad \rho(A) = \int_A g \, d\mu, \qquad \forall\, A \in \mathcal{A}.$$

$\nu \ll \rho$ betekent dat

$$\rho(A) = \int_A g \, d\mu = 0 \quad \Longrightarrow \quad \nu(A) = \int_A f \, d\mu = 0$$

Dus neem $A = \{x \in X \mid g(x) = 0\} \in \mathcal{A}$, dan moet gelden dat $f|_A = 0$ μ-a.e. Dus de nulpunten van g zijn bevat in de nulpunten van f tot op een verzameling van μ-maat 0.
Omgekeerd, als $f|_{\{x|g(x)=0\}} = 0$ μ-a.e. en veronderstel $\rho(B) = \int_B g \, d\mu = 0$, dan is $g = 0$ op B μ-a.e. en dus is ook $f = 0$ op B μ-a.e. en volgt $\nu(B) = \int_B f \, d\mu = 0$. Dus $\nu \ll \rho$.
In dat geval hebben we met $A = \{x \in X \mid g(x) = 0\}$

$$\nu(B) = \int_B f \, d\mu = \int_{B\cap A} f \, d\mu + \int_{B\cap A^c} f \, d\mu = 0 + \int_{B\cap A^c} \frac{f}{g} g \, d\mu = \int_{B\cap A^c} \frac{f}{g} \, d\rho$$

dus μ-a.e. is de Radon-Nikodym afgeleide

$$\frac{d\nu}{d\rho}(x) = \begin{cases} 0, & x \in A \\ \frac{f(x)}{g(x)}, & x \in A^c. \end{cases}$$

   (b) Als ν willekeurig is dan stellen we weer $N = \{x \in X \mid g(x) = 0\}$ en we schrijven

$$\nu(A) = \nu(A \cap N) + \nu(A \cap N^c) = \int_A \chi_N f \, d\mu + \int_A \chi_{N^c} f \, d\mu$$

De nulpunten $\{\chi_{N^c} f = 0\} = \{f = 0\} \cup N \supset \{g = 0\}$, en dus is $\nu_{\mathrm{ac}}(A) = \int_A \chi_{N^c} f \, d\mu$ absoluut continu ten opzichte van ρ. Merk op dat $\nu_{\mathrm{s}}(A) = \int_A \chi_N f \, d\mu$ singulier is ten opzichte van ρ, want ν_{s} is gedragen op N en $\rho(N) = 0$.

3. (i) Definitie op p. 312 van Cohn.

(ii) $E(S_n) = nE(X_1)$ want dat is de lineariteit van de integraal en het gelijk verdeeld zijn van $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Als in Corollary 10.1.11 geldt $\mathrm{var}(S_n) = n\mathrm{var}(X_1)$, omdat de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ identiek verdeeld zijn en onafhankelijk.

(iii) Theorem 10.2.1, en bewijs van Theorem 10.2.1.

4. (i) (a) Voor $\mu^*(\emptyset) = 0$ neem $A = \emptyset \in \mathcal{A}$, zodat $\mu^*(\emptyset) \leq 0$, en aangezien $\mu^*(B) \geq 0$ voor alle $B \subset X$ volgt $\mu^*(\emptyset) = 0$.

(b) Merk op

$$\mu^*(B_2) = \inf\{\mu(A) \mid A \in \mathcal{A}, B_2 \subset A\} \geq \inf\{\mu(A) \mid A \in \mathcal{A}, B_1 \subset A\} = \mu^*(B_1)$$

want als $A \in \mathcal{A}$ voldoet aan $B_2 \subset A$, dan ook $B_1 \subset A$.

(c) Voor de σ-subadditiviteit, kies voor elke $n \in \mathbb{N}$ een $\varepsilon_n > 0$ willekeurig en daarbij een $A_n \in \mathcal{A}$ met $B_n \subset A_n$ en $\mu(A_n) \leq \mu^*(B_n) + \varepsilon_n$. Dan geldt $\cup_{n\in\mathbb{N}} B_n \subset \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$ en dus per definitie

$$\mu^*(\cup_{n\in\mathbb{N}} B_n) \leq \mu(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} (\mu^*(B_n) + \varepsilon_n).$$

Kies nu $\varepsilon > 0$ willekeurig, en daarbij een rij $\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zodanig dat $\sum_{n\in\mathbb{N}} \varepsilon_n \leq \varepsilon$, dan volgt dat $\mu^*(\cup_{n\in\mathbb{N}} B_n) \leq \varepsilon + \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(B_n)$. Dus volgt de σ-subadditiviteit van μ^*; $\mu^*(\cup_{n\in\mathbb{N}} B_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(B_n)$.

(ii) Omdat $B \subset B \in \mathcal{A}$ geldt $\mu^*(B) \leq \mu(B)$. Omgekeerd, voor alle $A \in \mathcal{A}$ met $B \subset A$ geldt $\mu(B) \leq \mu(A)$, en dus is $\mu(B)$ een ondergrens voor $\{\mu(A) \mid B \subset A \in \mathcal{A}\}$. Dus $\mu(B) \leq \mu^*(B)$, en dus $\mu^*(B) = \mu(B)$.

(iii) (a) We weten dat $\mu^*(C) \leq \mu^*(C \cap B) + \mu^*(C \cap B^c)$ voor alle $B, C \subset X$ vanwege de subadditiviteit van μ^*. Zij nu $B \in \mathcal{A}$, dan $\mu(B) = \mu^*(B)$. De omgekeerde ongelijkheid is triviaal als $\mu^*(C) = \infty$. Neem aan dat $\mu^*(C) < \infty$. Kies $\varepsilon > 0$ en bepaal $A \in \mathcal{A}$ met $C \subset A$ en $\mu(A) \leq \mu^*(C) + \varepsilon$. Dan geldt

$$\mu^*(C) + \varepsilon \geq \mu(A) = \mu(A \cap B) + \mu(A \cap B^c) \geq \mu^*(C \cap B) + \mu^*(C \cap B^c)$$

want $C \cap B \subset A \cap B \in \mathcal{A}$ en $C \cap B^c \subset A \cap B^c \in \mathcal{A}$.

(b) We moeten bewijzen: stel $C \subset B \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ met $\mu^*(B) = 0$, dan $C \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ en $\mu^*(C) = 0$.
Vanwege de monotonie volgt $\mu^*(C) \leq \mu^*(B) = 0$, dus $\mu^*(C) = 0$. Om te bewijzen dat $C \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ moeten we laten zien dat

$$\mu^*(D) \geq \mu^*(D \cap C) + \mu^*(D \cap C^c), \qquad \forall D \subset X.$$

Er geldt $\mu^*(D \cap C) \leq \mu^*(C)$ want $D \cap C \subset C$ en dus is het voldoende te zien dat $\mu^*(D) \geq \mu^*(D \cap C^c)$ wat weer uit monotonie van μ^* volgt.

(c) Kies $E \in \mathcal{B}$, dan geldt voor elke $A \in \mathcal{A}$ met $E \subset A$ dat $\nu(E) \leq \nu(A) = \mu(A)$ zodat $\nu(E) \leq \mu^*(E)$. DIt geldt ook voor het complement, E^c, en gebruik makend van dat $\mu(X) = \nu(X) = \mu^*(X) < \infty$ volgt

$$\nu(E^c) = \nu(X) - \nu(E) \leq \mu^*(E^c) = \mu^*(X) - \mu^*(E) \quad \Rightarrow \quad \nu(E) \geq \mu^*(E)$$

en dus volgt $\nu(E) = \mu^*(E)$ voor elke $E \in \mathcal{B}$.