Radboud Universiteit

Tentamen Mathematical Models for Population Dynamics NWI-WP031
14 juni 2020, 08:30–10:30

Het gebruik van een rekenmachine/GR, telefoon, syllabus, boek, aantekeningen e.d. is **niet toegestaan**. Geef precieze argumenten en antwoorden. Zorg dat uw redeneringen en schrijfstijl helder en beknopt zijn. Noteer op **elk vel** uw naam en studentnummer.

---

1. De tijdgenoot Giovanni van Padua had als alternatief voor het model van Fibonacci voor de konijnenpopulatie het model

$$x_{n+2} = 2x_{n+1} + 3x_n, \qquad x_0 = 2, x_1 = 2.$$

   (i) Bepaal de algemene oplossing van $x_{n+2} = 2x_{n+1} + 3x_n$ (dus nog zonder de beginwaarden).

   (ii) Bepaal de oplossing van het model van Giovanni van Padua.

   (iii) Bepaal voor de oplossing van Giovanni van Padua de limiet $\lim_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$.

2. Beschouw de eerste orde differentievergelijking $x_{n+1} = f(x_n)$ met f gedefinieerd door $f(x) = x + \mu(x^2 - 1)$ voor een reële constante $\mu \neq 0$.

   (i) Het is gegeven dat 1 een evenwichtsoplossing is. Voor welke μ is de evenwichtsoplossing asymptotisch stabiel?

   (ii) Het is gegeven dat -1 een evenwichtsoplossing is. Voor welke μ is de evenwichtsoplossing asymptotisch stabiel?

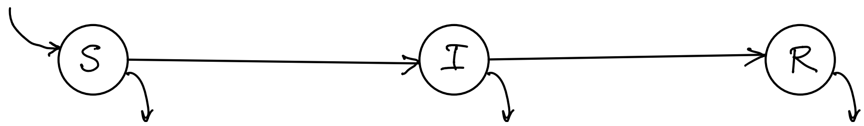
   (iii) Voor welke μ zijn er periodieke oplossingen van periode 2?

3. We bekijken het volgende model, waarbij $N(t)$ de totale populatie, van zeg mensen, is op tijdstip t, en $S(t)$ is het aantal vatbare mensen in de populatie op tijdstip t (voor een bepaalde potentieel dodelijke infectieziekte), en $I(t)$ is het aantal geïnfecteerde mensen op tijdstip t, en $R(t)$ is het aantal van de ziekte herstelde mensen in de populatie op tijdstip t. Er geldt $N(t) = S(t) + I(t) + R(t)$. Beschouw het volgende model

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt}(t) = \mu N(t) - aS(t) - \beta \dfrac{I(t)S(t)}{N(t)}, \\ \dfrac{dI}{dt}(t) = \beta \dfrac{I(t)S(t)}{N(t)} - \gamma I(t) - bI(t), \\ \dfrac{dR}{dt}(t) = \gamma I(t) - cR(t) \end{cases}$$

   waarbij β, γ, μ en a, b, c positieve constantes zijn. De constantes a, b, c stellen de sterfte in de verschillende categoriën voor. De beginwaarden zijn $S(0) = S_0 \geq 0$, $I(0) = I_0 \geq 0$, $R(0) = R_0 \geq 0$.

(i) Geef een korte(!) motivatie waarom dit een geschikt model is voor ziekteverspreiding aan de hand van het volgende schema:



(ii) Neem vanaf nu aan dat $a = b = c = \mu$. Laat zien dat de populatie $N(t)$ constant is, gelijk aan N_0.

(iii) Stel $s(t) = S(t)/N_0$, $i(t) = I(t)/N_0$. Beredeneer dat $r(t) = R(t)/N_0$ vastligt. Laat zien dat

$$\begin{cases} \dfrac{ds}{dt}(t) = -\beta i(t)s(t) + \mu - \mu s(t), \\ \dfrac{di}{dt}(t) = \beta i(t)s(t) - (\gamma + \mu)i(t) \end{cases}$$

(iv) Bepaal de evenwichtsoplossingen van het stelsel differentiaalvergelijkingen en bespreek de relevantie voor de populatie.

(v) Analyseer de stabiliteit van de evenwichtsoplossing die correspondeert met het afwezig zijn van geïnfecteerden.

4. Beschouw de eerste orde differentiaalvergelijking $\dfrac{dy}{dt}(t) = f(y(t))$ voor een populatie y met $f(y) = y(y-1)^2(2-y)$.

(i) Geef een schets van het richtingenveld.

(ii) Beschouw de oplossing van het beginwaardeprobleem $\dfrac{dy}{dt}(t) = f(y(t))$, $y(0) = y_0 \geq 0$. Wat kunt u zeggen over $\lim_{t\to\infty} y(t)$ en welke conclusie kunt hieraan verbinden met betrekking tot de stabiliteit van de evenwichtsoplossingen?

Normering						
Opgave	Opgave 1	Opgave 2	Opgave 3	Opgave 4	Gratis	Totaal
Punten	15	25	35	15	10	100

Uitwerkingen en antwoorden

1. (i) Los op $x_{n+2} - 2x_{n+1} - 3x_n = 0$ door $x_n = r^n$ te nemen. Dan moet $r^2 - 2r - 3 = (r-3)(r+1)$. Dus algemene oplossing is $x_n = A(-1)^n + B3^n$.

   (ii) $x_0 = 2 = A+B$ en $x_1 = 2 = -A+3B$ oplossen geeft $A = B = 1$, dus de oplossing is $x_n = (-1)^n + 3^n$.

   (iii)
$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(-1)^{n+1} + 3^{n+1}}{(-1)^n + 3^n} = \frac{-(-1/3)^n + 3}{(-1/3)^n + 1} \to 3, \qquad n \to \infty.$$

2. (i) Bepaal $f'(x) = 1 + 2\mu x$. Dan is $f'(1) = 1 + 2\mu$ en we hebben dat $|f'(1)| < 1$ dan en slechts dan als $|1 + 2\mu| < 1$ ofwel als $-1 < \mu < 0$.

   (ii) $|f'(-1)| < 1$ als $|1 - 2\mu| < 1$ ofwel $0 < \mu < 1$.

   (iii) Merk op dat $x = \pm 1$ de enige evenwichtsoplossingen zijn. Voor een periodieke oplossing met periode 2 zoeken we oplossingen van $x = f(f(x))$ ofwel
$$\begin{aligned} x = f(x + \mu(x^2-1)) &= x + \mu(x^2-1) + \mu\Big(\big(x + \mu(x^2-1)\big)^2 - 1\Big) \\ \iff 0 &= \mu(x^2-1) + \mu\Big(x^2 + 2\mu(x^2-1) + \mu^2(x^2-1)^2 - 1\Big) \\ \iff 0 &= \mu(x^2-1)\Big(1 + 1 + 2\mu x + \mu^2(x^2-1)\Big) \end{aligned}$$
   Omdat $x = \pm 1$ evenwichtsoplossingen zijn, bekijken we
$$\begin{aligned} 0 = \Big(1 + 1 + 2\mu x + \mu^2(x^2-1)\Big) \quad &\iff \quad x^2 + \frac{2}{\mu}x + \frac{2-\mu^2}{\mu^2} = 0 \\ &\iff \quad (x + \frac{1}{\mu})^2 + \frac{1-\mu^2}{\mu^2} = 0 \end{aligned}$$
   dus $x_\pm = -\frac{1}{\mu} \pm \sqrt{\frac{\mu^2-1}{\mu^2}}$, en dus hebben we voor $|\mu| > 1$ nodig voor 2 verschillende reële oplossingen. (Als $\mu = \pm 1$, dan vinden we de evenwichtsoplossingen ∓ 1.) En inderdaad,
$$f(x_\pm) = -\frac{1}{\mu} \pm \sqrt{\frac{\mu^2-1}{\mu^2}} + \mu(\frac{1}{\mu^2} \mp \frac{2}{\mu}\sqrt{\frac{\mu^2-1}{\mu^2}} + \frac{\mu^2-1}{\mu^2} - 1) = x_\mp.$$

3. (i) Er is een standaardgeboorte invloed $\mu N(t)$, en die zijn dan alle vatbaar. De overgang van vatbaar naar geïnfecteerd wordt gemodeleerd met het product van de twee (er moet een infectie overgebracht worden), en de term $-aS(t)$ is de sterfte in de vatbaren. De geïnfecteerden groeien met de afname van de vatbaren, en ook hier is een sterfte term $-bI(t)$. Een proportioneel deel van de geïnfecteerden herstelt, en ook hier is een sterfteterm $-cR(t)$.

(ii) Als de sterfteratios hetzelfde zijn als de geboorteratio, verwacht je een constante populatie. Tel alle afgeleides op dan

$$\frac{dN}{dt} = \frac{dS}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dR}{dt} = 0.$$

(iii) Omdat $N(t) = N_0$ volgt

$$1 = \frac{S(t) + I(t) + R(t)}{N_0} = s(t) + i(t) + r(t) \quad \Longrightarrow \quad r(t) = 1 - s(t) - i(t)$$

Merk op dat

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt}(t) &= \frac{1}{N_0}\frac{dS}{dt}(t) = \mu - \mu\frac{S(t)}{N_0} - \beta\frac{I(t)S(t)}{N_0^2} = \mu - \mu s(t) - \beta i(t)s(t), \\ \frac{di}{dt}(t) &= \frac{1}{N_0}\frac{dI}{dt}(t) = \beta\frac{I(t)S(t)}{N_0^2} - \gamma\frac{I(t)}{N_0} - \mu\frac{I(t)}{N_0} = \beta i(t)s(t) - (\gamma+\mu)i(t) \end{aligned}$$

(iv) Voor de evenwichtsoplossingen moeten we oplossen

$$\begin{cases} \mu - \mu s - \beta i s = 0 \\ \beta i s - (\gamma+\mu)i = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \mu - \mu s - \beta i s = 0 \\ i = 0 \quad \vee s = \frac{\gamma+\mu}{\beta} \end{cases}$$

Dan $i = 0$ geeft $s = 1$, en dan dus $r = 0$. Dat is de oplossing waarin de ziekte niet voorkomt (triviale evenwichtsoplossing). Voor $s = \frac{\gamma+\mu}{\beta}$ vinden we

$$i = \frac{\mu(1-s)}{\beta s} = \frac{\mu(\beta - (\gamma+\mu))}{\beta(\gamma+\mu)}$$

en dan is r gelijk aan

$$\begin{aligned} r = 1 - i - s = 1 - \frac{\mu(\beta-(\gamma+\mu))}{\beta(\gamma+\mu)} - \frac{\gamma+\mu}{\beta} &= \frac{\beta(\gamma+\mu) - \mu(\beta-(\gamma+\mu)) - (\gamma+\mu)^2}{\beta(\gamma+\mu)} \\ &= \frac{-\mu\beta + (\mu+\beta)(\gamma+\mu) - (\gamma+\mu)^2}{\beta(\gamma+\mu)} \end{aligned}$$

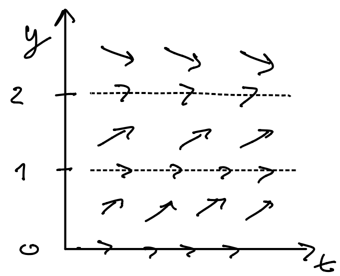
Voor de relevantie voor het populatiemodel moeten we hebben dat alle waardes in $[0, 1]$ liggen.

(v) Bereken de matrix van partiële afgeleiden:

$$\begin{pmatrix} -\beta i - \mu & -\beta s \\ \beta i & \beta s - (\gamma+\mu) \end{pmatrix}\Bigg|_{i=0,s=1} = \begin{pmatrix} -\mu & -\beta \\ 0 & \beta - (\gamma+\mu) \end{pmatrix}$$

en dus is deze evenwichtsoplossing asymptotisch stabiel als $\beta < \gamma+\mu$, en instabiel als $\beta > \gamma + \mu$.

4. (i) Zie plaatje.



(ii) De evenwichtsoplossingen zijn $y = 0$, $y = 1$, $y = 2$. En het teken van f is positief op $(0,1)$, $(1,2)$ (en daar is $y(t)$ stijgend) en negatief op $(2,\infty)$. Dus

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} y(t) = 2 \qquad &\text{als} \quad y_0 > 1,\\ \lim_{t\to\infty} y(t) = 1 \qquad &\text{als} \quad 0 < y_0 \le 1,\\ \lim_{t\to\infty} y(t) = 0 \qquad &\text{als} \quad y_0 = 0.\end{aligned}$$

Dus 2 is een asymptotisch stabiel evenwichtsoplossing, en $y = 1$ en $y = 0$ zijn instabiel.