Radboud Universiteit

Tentamen Maattheorie NWI-WB088
5 juli 2021, 12:45–15:45

Het gebruik van een rekenmachine/GR, telefoon, syllabus, boek, aantekeningen e.d. is **niet toegestaan**. Geef precieze argumenten en antwoorden. Zorg dat uw redeneringen en schrijfstijl helder en beknopt zijn. Noteer op **elk vel** uw naam en studentnummer.

---

1. Zij $(X, \mathcal{A}, \mu)$ een maatruimte.

   (i) Formuleer de monotone convergentiestelling.

   (ii) Stel we hebben meetbare functies $f_n \colon X \to [0, \infty]$, $n \in \mathbb{N}$. Bewijs dat

   $$\int_X \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n \, d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_X f_n \, d\mu.$$

   (iii) Stel nu dat de meetbare functies f_n waarden aannemen in de uitgebreide reële rechte, $f_n \colon X \to [-\infty, \infty]$, $n \in \mathbb{N}$, en dat de reeks $\sum_{n\in\mathbb{N}} \int_X |f_n| \, d\mu$ convergent is. Bewijs dat

   $$\int_X \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n \, d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_X f_n \, d\mu.$$

   (Hint: gedomineerde convergentiestelling van Lebesgue.)

2. (i) Formuleer de stelling van Tonelli.

   (ii) Beschouw de maatruimte $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, en laat f en g niet-negatieve meetbare functies zijn voor deze maatruimte.

   (a) Bewijs dat $(x, y) \mapsto f(x-y)g(y)$ meetbaar is met betrekking tot $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$.

   (b) Veronderstel dat f en g bovendien integreerbaar zijn. Bewijs dat de functie $(x, y) \mapsto f(x - y)g(y)$ integreerbaar is met betrekking tot de maatruimte $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2), \lambda \times \lambda)$. (U mag zonder bewijs gebruiken dat $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$ als σ-algebras.)

3. Zij $(X, \mathcal{A})$ een ruimte met een σ-algebra.
   (i) Formuleer de Hahn decompositiestelling voor een getekende maat.
   (ii) Formuleer de Jordan decompositiestelling voor een getekende maat.
   (iii) Bewijs uw uitspraak van (ii).
   (iv) Veronderstel dat $g\colon X \to \mathbb{R}$ een meetbare functie is, en dat μ een (positieve) maat is op $(X, \mathcal{A})$.
      (a) Onder welke voorwaarden op g is $\nu(A) = \int_A g \, d\mu$ een getekende maat?
      (b) Met de voorwaarde(n) van (a): wat is de Jordan decompositie van ν?

4. Zij $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ een kansruimte. Zij $X : \Omega \to \mathbb{R}$ een reële stochastische variabele met eindig eerste moment, en zij $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ een σ-subalgebra. Een voorwaardelijke verwachting van X met betrekking tot $\mathcal{B}$ is een $\mathcal{B}$-meetbare reële stochastische variabele $E(X \mid \mathcal{B}) \colon \Omega \to \mathbb{R}$ met
$$\forall\, B \in \mathcal{B} \qquad \int_B E(X \mid \mathcal{B}) \, dP = \int_B X \, dP.$$
   (i) Zij X als boven. Laat zien dat X een voorwaardelijke verwachting heeft met betrekking tot $\mathcal{B}$, en dat deze uniek is bijna zeker (i.e. bijna overal met betrekking tot P). (Hint: Radon-Nikodym stelling).
   (ii) We veronderstellen de aannames als boven. Veronderstel dat $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$ een σ-subalgebra is. Bewijs dat $E(X \mid \mathcal{C}) = E(E(X \mid \mathcal{B}) \mid \mathcal{C})$ bijna zeker.
   (iii) Neem de situatie als boven aan, en veronderstel dat $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ een begrensde reële stochastische variabele is, die bovendien meetbaar is met betrekking tot σ-subalgebra $\mathcal{B}$. Laat zien dat $E(XY \mid \mathcal{B}) = Y \, E(X \mid \mathcal{B})$. (Hint: doe het eerst voor Y een karakteristieke functie, en u mag aannemen dat de voorwaardelijke verwachting nemen een lineaire operatie is.)

Normering						
Opgave	Opgave 1	Opgave 2	Opgave 3	Opgave 4	Gratis	Totaal
Punten	25	20	25	20	10	100

Uitwerkingen en antwoorden

1. (i) Cohn, Theorem 2.4.1.

   (ii) Stel $g_N = \sum_{n=0}^{N} f_n$, $N \in \mathbb{N}$, dan is $(g_N)_{n\in\mathbb{N}}$ een monotoon stijgende rij van niet-negatieve meetbare functies, en $\lim_{N\to\infty} g_N = \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$. Volgens de monotone convergentiestelling geldt

$$\int_X \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n \, d\mu = \int_X \lim_{N\to\infty} g_N \, d\mu = \lim_{N\to\infty} \int_X g_N \, d\mu = \lim_{N\to\infty} \int_X \sum_{n=0}^{N} f_n \, d\mu$$
$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \int_X f_n \, d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \int_X f_n \, d\mu$$

   Merk op dat dit in Corollary 2.4.2 (Beppo Levi) van Cohn staat.

   (iii) Stel $F = \sum_{n\in\mathbb{N}} |f_n|$, dan is volgens (ii) F een niet-negatieve integreerbare functie want $\int_X F \, d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_X |f_n| \, d\mu < \infty$. In het bijzonder is F bijna overal eindig, en dus is de reeks $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ bijna overal absoluut convergent. Definieer $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ als de reeks absoluut convergent is en stel $f(x) = 0$ als de reeks niet absoluut convergent is (dit is dus op een verzameling van maat 0). Dan geldt, met weer $g_N = \sum_{n=0}^{N} f_n$, dat

$$|g_N| \le \sum_{n=0}^{N} |f_n| \le \sum_{n\in\mathbb{N}} |f_n| = F$$

   en dus kunnen we de gedomineerde convergentiestelling toepassen:

$$\int_X f \, d\mu = \int_X \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n \, d\mu = \int_X \lim_{N\to\infty} g_N \, d\mu = \lim_{N\to\infty} \int_X g_N \, d\mu$$
$$= \lim_{N\to\infty} \int_X \sum_{n=0}^{N} f_n \, d\mu = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \int_X f_n \, d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

   Merk op dat de verzameling waar f en $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ niet overeenstemmen een verzameling van maat 0 is, en dat verandert de integraal niet.

2. (i) Cohn, Proposition 5.2.1.

   (ii) (a) $(x, y) \mapsto f(x-y)$ is meetbaar als samenstelling van de continue (en meetbare afbeelding) $(x, y) \mapsto x - y$ en f. Idem is $(x, y) \mapsto g(y)$ meetbaar, en dus is het produkt meetbaar.

   (b) Tonelli geeft dan (gebruik makend van f, g niet negatief)

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x-y)g(y) \, d(\lambda \times \lambda)(x, y) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x-y) \, d\lambda(x) \right) g(y) \, d\lambda(y)$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x) \, d\lambda(x) \right) g(y) \, d\lambda(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \, d\lambda(x) \cdot \int_{\mathbb{R}} g(y) \, d\lambda(y) < \infty$$

gebruik makend van de translatieinvariantie van de Lebesguemaat en het feit dat f en g beiden integreerbaar zijn.

3. (i) Theorem 4.1.5 van Cohn.

   (ii) Corollary 4.1.6 van Cohn.

   (iii) Zij μ de getekende maat dan is $\mu = \mu^+ - \mu^-$ de Jordan decompositie, met $\mu^+(A) = \mu(A \cap P)$, $\mu^-(A \cap N)$, waarbij (P, N) de positieve en negatieve verzameling van de Hahn decompositie zijn. Dan is μ^+ of μ^- een eindige maat.

   (iv) (a) Schrijf $g = g^+ - g^-$ met $g^+(x) = \max(0, g(x))$, $g^-(x) = -\min(0, g(x))$, dan zijn $g^\pm \colon X \to [0, \infty)$ meetbaar en $g = g^+ - g^-$. Dan is $\nu^\pm(A) = \int_A g^\pm \, d\mu$ een positieve maat, en $\nu = \nu^+ - \nu^-$. Omdat minstens een van de maten $\nu^\pm$ eindig moet zijn, moet minstens een van de integralen $\int_X g^\pm \, d\mu < \infty$ zijn.

   (b) $\nu = \nu^+ - \nu^-$ van (a) is de Jordanontbinding.

4. (i) Definieer de maat

$$\nu(B) = \int_B X \, dP, \qquad \nu \colon \mathcal{B} \to [0, \infty]$$

   op de maatruimte $(\Omega, \mathcal{B}, P)$. Dan is $\nu \ll P$, en de maat ν (en natuurlijk ook P) is eindig want X heeft eindig eerste moment, en dus is de Radon-Nikodym stelling toepasbaar. Dus

$$\nu(B) = \int_B \frac{d\nu}{dP} \, dP,$$

   en stel $E(X \mid \mathcal{B}) = \frac{d\nu}{dP}$. En deze is uniek bepaald bijna overal.

   (ii) Voor alle $C \in \mathcal{C}$ geldt

$$\int_C E(E(X \mid \mathcal{B}) \mid \mathcal{C}) \, dP = \int_C E(X \mid \mathcal{B}) \, dP.$$

   Omdat C ook in $\mathcal{B}$ zit volgt

$$\int_C E(X \mid \mathcal{B}) \, dP = \int_C X \, dP.$$

   Dit geldt voor alle $C \in \mathcal{C}$ en dus volgt met behulp van de definitie en de uniciteit (zie (i)) dat $E(E(X \mid \mathcal{B}) \mid \mathcal{C}) = E(X \mid \mathcal{C})$.

   (iii) Stel $Y = \chi_{B_1}$ met $B_1 \in \mathcal{B}$ (en dus is Y dan $\mathcal{B}$-meetbaar), dan voor een willekeurig $B \in \mathcal{B}$ volgt

$$\int_B XY \, dP = \int_{B \cap B_1} X \, dP = \int_{B \cap B_1} E(X \mid \mathcal{B}) \, dP$$

omdat $B \cap B_1 \in \mathcal{B}$ en de definitie van voorwaardelijke verwachting. Dan

$$\int_{B \cap B_1} E(X \mid \mathcal{B})\, dP = \int_B \chi_{B_1} E(X \mid \mathcal{B})\, dP = \int_B Y E(X \mid \mathcal{B})\, dP.$$

Vanwege de uniciteit van de voorwaardelijke verwachting volgt $E(XY \mid \mathcal{B}) = YE(X \mid \mathcal{B})$ bijna zeker. Dan volgt het vervolgens voor een willekeurige begrensde simpele functie (vanwege de gegeven lineariteit). Kies nu een rij van $\mathcal{B}$-meetbare simpele functies Y_n die naar Y convergeren zodanig dat $|Y_n| \leq |Y|$. Dan geldt

$$\lim_{n\to\infty} \int_B Y_n E(X \mid \mathcal{B})\, dP = \int_B Y E(X \mid \mathcal{B})\, dP, \qquad \forall\, B \in \mathcal{B}$$

vanwege de gedomineerde convergentiestelling. Anderzijds geldt ook

$$\lim_{n\to\infty} \int_B Y_n E(X \mid \mathcal{B})\, dP = \lim_{n\to\infty} \int_B E(XY_n \mid \mathcal{B})\, dP =$$
$$\lim_{n\to\infty} \int_B XY_n\, dP = \int_B XY\, dP, \qquad \forall\, B \in \mathcal{B}$$

vanwege de gedomineerde convergentiestelling. En dus krijgen we

$$\int_B Y E(X \mid \mathcal{B})\, dP = \int_B XY\, dP, \qquad \forall\, B \in \mathcal{B}$$

en dus $YE(X \mid \mathcal{B}) = E(XY \mid \mathcal{B})$ bijna zeker vanwege (i).