Radboud Universiteit

Tentamen Mathematical Models for Population Dynamics NWI-WP031
5 juli 2021, 08:30–10:30

Het gebruik van een rekenmachine/GR, telefoon, syllabus, boek, aantekeningen e.d. is **niet toegestaan**. Geef precieze argumenten en antwoorden. Zorg dat uw redeneringen en schrijfstijl helder en beknopt zijn. Noteer op **elk vel** uw naam en studentnummer.

---

1. Beschouw het gekoppelde stelsel eerste orde differentiaalvergelijkingen

$$\frac{dy_1}{dt}(t) = 11\,y_1(t) + 6\,y_2(t)$$
$$\frac{dy_2}{dt}(t) = -18\,y_1(t) - 10\,y_2(t)$$

   (a) Bepaal de algemene oplossing van het stelsel.

   (b) Beschouw het stelsel met de beginwaarde $y_1(0) = a$, $y_2(0) = b$. Voor welke waarde(s) van (a, b) geldt dat de oplossing naar de nuloplossing $(y_1(t), y_2(t)) = (0, 0)$ convergeert als $t \to \infty$?

   (c) Geef een schets van het faseplaatje in het (y_1, y_2)-vlak.

2. Beschouw de differentievergelijking $x_n = f(x_n)$ met

$$f(x) = \frac{rx}{1 + x/M}, \qquad r > 0, M > 0.$$

   We beschouwen alleen de oplossingen met $x_n \geq 0$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

   (a) Bepaal de evenwichtsoplossing(en).

   (b) Wat kunt u zeggen over de stabiliteit van de evenwichtsoplossing(en) van (a)?

   (c) Heeft de differentievergelijking $x_n = f(x_n)$ periodieke oplossingen van periode 2?

   (d) Verwacht u chaotisch gedrag als r groot wordt?

3. Beschouw de gekoppelde eerste orde differentiaalvergelijkingen

$$\frac{dx}{dt}(t) = 5 - x(t)^2 - y(t)^2,$$
$$\frac{dy}{dt}(t) = x(t) + 2y(t),$$

   (a) Bepaal de evenwichtsoplossingen.

   (b) Bepaal de stabiliteitseigenschappen van de evenwichtsoplossingen.

4. Bekijk het volgende model

$$\frac{dH}{dt}(t) = r(1 - \frac{H(t)}{k})H(t) - aH(t)P(t),$$
$$\frac{dP}{dt}(t) = -\mu P(t) + a\gamma H(t)P(t),$$

   waarbij alle constantes r, k, a, μ, γ positief zijn.

   (a) Geef een interpretatie van dit model als populatiemodel.

   (b) Laat zien dat het beginwaarde probleem met beginwaarde $H(0) = H_0 \geq 0$, $P(0) = P_0 \geq 0$ een oplossing heeft waarvoor geldt $H(t) \geq 0$ en $P(t) \geq 0$.

5. Bekijk het volgende alternatieve model voor de konijnenpopulatie van Fibonacci;

$$x_{n+2} = 2x_{n+1} + x_n.$$

   (a) Bepaal de algemene oplossing.

   (b) Bepaal de oplossing met beginvoorwaarden $x_0 = 2$, $x_1 = 2$.

Normering

Opgave	Opgave 1	Opgave 2	Opgave 3	Opgave 4	Opgave 5	Gratis	Totaal
Punten	20	25	20	15	10	10	100

Uitwerkingen en antwoorden

1. (i) Stel de matrix $A = \begin{pmatrix} 11 & 6 \\ -18 & -10 \end{pmatrix}$ dan is $\mathrm{Tr}(A) = 1$ en $\det(A) = -2$. Dus het karakteristieke polynoom is

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \mathrm{Tr}(A)\lambda + \det(A) = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda + 1)$$

dus de eigenwaarden van A zijn 2 en -1. Dan bepalen we de eigenvector voor $\lambda = 2$ als de $\mathrm{Ker}(A - 2)$;

$$\mathrm{Ker}(A-2) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 9 & 6 \\ -18 & -12 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

en de eigenvector voor $\lambda = -1$ als de $\mathrm{Ker}(A + 1)$;

$$\mathrm{Ker}(A+1) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 12 & 6 \\ -18 & -9 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Dan is de algemene oplossing gegeven door

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = Ae^{2t}\, v_1 + Be^{-t} v_2$$

met A, B reëele constantes.

(ii) De algemene oplossing convergeert naar de nuloplossing precies dan als $A = 0$, ofwel als $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ een veelvoud is van de vector v_2.

(iii)

2. (a) We lossen op $f(x) = x$, dan $x = 0$ of

$$\frac{r}{1 + x/M} = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad r = 1 + x/M \quad \Longleftrightarrow \quad x = M(r-1)$$

Deze oplossing is alleen relevant als $r > 1$.

(b) Merk op

$$f'(x) = \frac{r(1+x/M) - rx\frac{1}{M}}{(1+\frac{x}{M})^2} = \frac{rM^2}{(M+x)^2}$$

Dus $|f'(0)| = r < 1$ (want $r > 0$), en dus is de evenwichtsoplossing 0 asymptotisch stabiel als $r < 1$ en instabiel als $r > 1$.
Als $r > 1$, dan hebben we ook de evenwichtsoplossing $M(r-1)$ en

$$|f'(M(r-1))| = \frac{rM^2}{(Mr)^2} = \frac{1}{r} < 1$$

en deze is dan asymptotisch stabiel.

(c) Bepaal $x = f(f(x))$, en we kennen al twee oplossingen.

$$x = \frac{rf(x)}{1+f(x)/M} = \frac{r\frac{rx}{1+x/M}}{1+\frac{rx}{M(1+x/M)}} = \frac{Mr^2x}{M(1+x/M)+rx}$$

Aangezien we 0 als evenwichtsoplossing hebben, moeten we hebben dat

$$Mr^2 = M + (1+r)x \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{M(r^2-1)}{1+r} = M(r-1)$$

Dus geen periodieke oplossingen van periode 2.

(d) Nee; geen periodieke oplossingen, en $\frac{x}{1+x/M}$ convergeert niet naar 0 als $x \to \infty$ (zie p.35 van syllabus).

3. (a) Vaste punten krijg je door

$$0 = (5 - x^2 - y^2), \qquad 0 = x + 2y$$

Dus $x = -2y$ en $5y^2 = 5$. Dus $(-2, 1)$ en $(2, -1)$ zijn evenwichtspunten.

(b) De linearisatie wordt gegeven door

$$\begin{pmatrix} -2x & -2y \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

In $(x, y) = (-2, 1)$ is het

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_1\lambda_2 = \det = 10,\ \lambda_1 + \lambda_2 = \mathrm{Tr} = 6$$

dus $\lambda_1 = 3 + i$, $\lambda_2 = 3 - i$, dus instabiel evenwichtspunt want reële deel > 0.
In $(x, y) = (2, -1)$ is het

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_1\lambda_2 = \det = -10,\ \lambda_1 + \lambda_2 = \mathrm{Tr} = -2$$

dus $0 = \lambda^2 - 2\lambda - 10 = (\lambda-1)^2 - 11$ dus $\lambda = 1 \pm \sqrt{11}$. Dus instabiel evenwichtspunt, want er is een $\lambda > 0$.

4. (a) Merk op dat dit Lotka-Volterra is met de Verhulst vergelijking voor de prooidieren (dus met capaciteit van de omgeving).

   (b) Herschrijf

$$\frac{H'}{H} = r(1 - \frac{H}{k}) - aP \quad \Longrightarrow \quad \ln H = \int r(1 - \frac{H}{k}) - aPdt$$

   dus $H(t) = H_0 \exp(\int_0^t r(1 - \frac{H(s)}{k}) - aP(s)ds) \geq 0$. Voor P gaat het evenzo. Alternatief: gebruik de existentie- en uniciteitsstelling.

5. (a) De karakteristieke vergelijking is

$$\lambda^2 = 2\lambda + 1 \quad \Longrightarrow \quad 0 = \lambda^2 - 2\lambda - 1 = (\lambda - 1)^2 - 2 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = 1 \pm \sqrt{2}$$

   Dus de algemene oplossing is $x_n = A(1+\sqrt{2})^n + B(1-\sqrt{2})^n$.

   (b) $x_0 = 2$ geeft $A+B = 2$, en $x_1 = 2$ geeft $A(1+\sqrt{2}) + B(1-\sqrt{2}) = A+B+\sqrt{2}(A-B) = 2$. Dit heeft als oplossing $A = B = 1$. Dus

$$x_n = (1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n$$