dr. M.L.A. van Pruijssen — Nijmegen, 29 oktober 2021

Calculus A (WP025) 2021-22 — **Deeltoets**

Naam: ________________ Studentnummer: ________________

Naam werkcollegeleider: ________________

- Schrijf op elk vel je naam en studentnummer.
- Schrijf netjes en wees bondig. Motiveer alle antwoorden en berekeningen.
- Je hebt 120 minuten de tijd voor deze deeltoets (150 als je recht hebt op extra tijd).
- Je mag geen hulpmiddelen gebruiken.
- **Lever dit blad ook in!**

Question:	1	2	3	4	5	6	Total
Points:	10	5	10	10	10	9	54
Score:							

---

1. Beschouw de functie (10)

$$f(t) = \frac{(e^t - 1)^2}{e^{2t} + 1}$$

op het domein $[0, \infty)$.

(a) Bereken een primitieve van f.

(b) Laat zien dat f injectief is.

(c) Bepaal het bereik van f.

(d) Bepaal de inverse f^{-1} van f en geef het domein van f^{-1} aan.

Solution:

Hier kun je de functie herschrijven door staartdelen. Dan is het handig om $u = e^t$ te schrijven zodat

$$f(t) = \frac{(u-1)^2}{u^2+1} = \frac{u^2 - 2u + 1}{u^2+1} = \frac{(u^2+1) - 2u}{u^2+1} = 1 - 2\frac{e^t}{1 + e^{2t}}.$$

(a) Een primitieve van $f(t) = 1 - 2\frac{e^t}{1+e^{2t}}$ is $t - 2\arctan(e^t)$.

(b) Hier is $f(t) = 1 - 2\frac{e^t}{1+e^{2t}}$. Dan is

$$f'(t) = -2\frac{(1+e^{2t})e^t - 2e^te^{2t}}{(1+e^{2t})^2} = \frac{2e^t(1-e^{2t})}{(1+e^{2t})^2}.$$

Omdat $f'(t) > 0$ op $(0, \infty)$ is f strikt stijgend en dus injectief.

(c) $f(0) = 0$ en $\lim_{t\to\infty} f(t) = 1$, dus het bereik is $[0, 1)$.

(d) Deze opgave is lastig, maar komt neer op het op;lossen van eenkwadratische vergelijking. Van de oplossingen is er slechts 1 relevant.

Zet $e^t = u$ en merk op $u \geq 1$. Dan is $1 - 2u/(1+u^2) = y$ dus $2u/(1+u^2) = 1-y$ en dus

$$(1-y)u^2 - 2u + 1 - y = 0$$

wat we oplossen voor u, we krijgen

$$u_\pm = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(1-y)^2}}{2(1-y)} = \frac{1 \pm \sqrt{1-(1-y)^2}}{(1-y)} = \frac{1 \pm \sqrt{y(2-y)}}{(1-y)}$$

Nu is $u_\pm - 1$ een positief veelvoud van $y \pm \sqrt{y(2-y)}$. Omdat $y \pm \sqrt{y(2-y)} < 0$ op voor $y \in (0,1)$ (neem bv $y = 1/2$, dan is $1/2 - \sqrt{3}/2 < 0$), moeten we dus nemen $e^t = u_+$ nemen en zodoende

$$t = \ln\left(\frac{1+\sqrt{y(2-y)}}{(1-y)}\right).$$

Daarmee is $f^{-1}(t) = \ln\left(\frac{1+\sqrt{y(2-y)}}{(1-y)}\right)$ waarbij $t \in [0,1)$, het bereik van f.

2. Formuleer de middelwaardestelling. (5)

Solution: Zij $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continu en differentieerbaar op (a,b). Dan bestaat er een $c \in (a,b)$ waarvoor geldt $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

3. De grootte van de populatie bacteriën op tijdstip t in een experiment is (10)

$$N(t) = (t-1)^5 e^{1-t} + e.$$

(a) Bepaal $N'(t)$.

(b) Het experiment loopt voor t in $[0,7]$. Bepaal de extreme waarden van N op dit interval.

(c) De universiteit besluit om het experiment te laten lopen tot het einde der tijden. Hoe groot is uiteindelijk de populatie bacteriën in het experiment?

Solution: (2+4+2)

(a)

$$N'(t) = (5(t-1)^4 - (t-1)^5)e^{1-t} = (t-1)^4(6-t)e^{1-t}.$$

(b) Candidates are boundary points $t = 0, t = 7$ and stationary points (because there are no singular points).

The stationary points are those where $N'(t) = 0$, so $t = 1, t = 6$.

The sign of N' between the candidate points is $++-$. This means that

a local minimum is assumed at $t = 0$ and $t = 7$,

a local maximum is assumed in $t = 6$.

In particular, at $t = 1$ there is no extremum!

(c) We have

$$\lim_{t\to\infty} \frac{(t-1)^5}{e^{t-1}} + e = \lim_{t\to\infty} \frac{e(t-1)^5}{e^t} + e = e$$

because e^t overpowers every polynomial.

4. Bepaal de onbepaalde integralen (10)

(a) $\int \frac{2x^3 + x^2}{x^2 + 1} dx$,

(b) $\int \frac{\cos(\ln(8t^3))}{t} dt$.

Solution: (5+5)

(a) Long division yields

$$\frac{2x^3 + x^2}{x^2 + 1} = \frac{2x^3 + 2x + x^2 + 1 - (2x + 1)}{x^2 + 1} = 2x + 1 - \frac{2x + 1}{x^2 + 1}.$$

We calculate

$$\int \frac{2x}{x^2 + 1} dx = \ln|x^2 + 1| + C, \quad \int \frac{1}{x^2 + 1} dx = \arctan(x) + C,$$

from which we find

$$\int \frac{2x^3 + x^2}{x^2 + 1} dx = x^2 + x - \ln(x^2 + 1) - \arctan(x) + C,$$

where we leave out the absolute value signes because $x^2 + 1 > 0$.

(b) With $u = \ln(2t)$ we have $du = \frac{1}{t} dt$ and hence, using $\ln(8t^3) = 3\ln(2t)$,

$$\int \frac{\cos(3\ln(2t))}{t} dt = \int \cos(3u) du = \frac{1}{3}\sin(3u) + C = \frac{1}{3}\sin(\ln(8t^3)) + C.$$

The sub $v = \ln(8t^3)$ also works, of course.

5. In het college hebben we gezien dat de integraal (10)

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$$

convergeert voor $x > 0$.

(a) Laat zien dat voor $x > 0$ geldt

$$x\Gamma(x) = \Gamma(x + 1)$$

door partieel te integreren.

(b) Bewijs met inductie dat $\Gamma(n + 1) = n!$ voor elk natuurlijk getal $n = 0, 1, 2, \ldots$. (De conventie is dat $0! = 1$).

(c) Bereken $\Gamma(\frac{1}{2})$, waarbij je mag gebruiken dat $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Solution: (a) Er geldt

$$x\Gamma(x) = \int_0^\infty x t^{x-1} e^{-t} dt = \dots$$

een oneigenlijke integraal waarvoor we dus de grenzen moeten vervangen door $0 < r < R$ en daarna de limieten $r \to 0+$ en $R \to \infty$ moeten nemen; als we dat doen kunnen we binnen de limieten integreren met de gebruikelijke rekenregels, in dit geval partiële integratie met $u = t^x, u' = xt^{x-1}, v = e^{-t}, v' = -e^{-t}$, zodat

$$\dots = \lim \left([t^x e^{-t}]_r^R + \int_r^R t^x e^{-t} dt \right) = \dots$$

en omdat $\lim_{r\to 0+} \frac{r^x}{e^r} = 0$ (gewoon invullen) en $\lim_{r\to 0+} \frac{R^x}{e^R} = 0$ omdat de exponentiële functie machten *overpowert* en omdat de tweede term ook convergeert naar $\Gamma(x+1)$ krijgen we

$$\dots = \Gamma(x+1).$$

(b) Er geldt $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = 1 = 0!$. Zij $k \geq 0$ en veronderstel dat $\Gamma(k+1) = k!$. Dan is

$$\Gamma(k+2) = (k+1)\Gamma(k) = (k+1)\cdot(k!) = (k+1)!$$

waar we de identiteit $(k+1)\Gamma(k+1) = \Gamma(k+2)$ uit deel (a) gebruikt hebben.

(c)

$$\Gamma(1/2) = \int_0^\infty t^{-1/2} e^{-t} dt = \dots$$

met $t = u^2, dt = 2udu$ blijven de grenzen gelijk en vinden we

$$\dots = \int_0^\infty \frac{1}{u} e^{-u^2} 2udu = 2\int_0^\infty e^{-u^2} du = \sqrt{\pi},$$

waar we de gelijkheid uit de opgave hebben gebruikt (die we op blad 7 bewezen hebben).

6. Meerkeuzevragen, je hoeft geen uitleg of berekening te geven. Er is steeds maar één goed antwoord. Een verkeerd antwoord is **minus 1**, een correct antwoord is **plus 3** en geen antwoord is **nul** punten. (9)

   Op dit blad je antwoord omcirkelen aub.

   (a) De afgeleide van

   $$\phi(x) = \int_2^{3x^2} \frac{t}{\ln(t)} dt$$

   is $\phi'(x) =$

A. $\dfrac{3x^2}{\ln(3x^2)}$ B. $\dfrac{6x^2}{\ln(x)}$ **C.** $\dfrac{18x^3}{\ln(3x^2)}$ D. $\dfrac{18x^2}{\ln(3x^2)}$ E. $6x\left(\dfrac{3x^2}{\ln(3x^2)} - \dfrac{2}{\ln(2)}\right)$.

(b) De limiet

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2) - x^2}{(\cos(x) - 1)^3}$$

is gelijk aan A. $-\infty$ B. $-\dfrac{8}{3}$ C. $-\dfrac{4}{3}$ D. 0 **E.** $\dfrac{4}{3}$ F. $\dfrac{8}{3}$ G. ∞.

(c) $\sin\left(\arctan\left(\dfrac{5}{12}\right)\right)$ is gelijk aan

A. $\dfrac{5}{12}$ B. $\dfrac{12}{13}$ C. $\dfrac{13}{5}$ **D.** $\dfrac{5}{13}$ E. $\dfrac{12}{5}$ F. 1.

Einde