Proeftentamen

1. $T \models \alpha \to \beta$ desda $T \cup \{\alpha\} \models \beta$

Linkerlid betekent: $\forall v$ met $v(\sigma)=1$ $\forall \sigma \in T$

geldt $v(\alpha \to \beta) = 1$

Rechterlid betekent: $\forall v$ met $v(\sigma)=1$ $\forall \sigma \in T$

en $v(\alpha)=1$ geldt $v(\beta)=1$.

Uit TT voor $\to$ volgt echter al voor alle v:

α	β	$\alpha \to \beta$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$v(\alpha)=1 \Longrightarrow v(\beta)=1$ 4e rij TT

desda

$v(\alpha \to \beta) = 1$ 4e rij TT

---

2. PA $\vdash t+s = s+t$

Inductie op $\varphi(x) \equiv y+x = x+y$

1). PA $\vdash \varphi(0)$ i.e. PA $\vdash y+0 = 0+y$

$$\dfrac{\dfrac{\text{PA3: } \forall x\,(x+0=x)}{y+0=y}\ \forall\text{-E} \qquad \dfrac{(3.3)\text{ syllabus: } \vdash \forall x\,(0+x=x)}{0+y=y}\ \forall\text{-E (V.12)} \qquad 0+y=y}{y+0=0+y}\ \text{regel 13b}$$

dus $\varphi(0)$ bewezen.

Inductiehypothese:

$\vdash \forall x\,(y+x = x+y) \to (y+S(x) = S(x)+y)$.

$$[y+x = y+x]$$

$S(y+x) = S(x+y)$ Opgave 3.2 a)

$y+S(x) = S(y+x)$ PA4 met $x \rightsquigarrow y$, $y \rightsquigarrow x$

$y+S(x) = S(x+y)$ regel 13b

$S(x)+y = S(x+y)$ Opgave 3.2 b) met $t \rightsquigarrow x$, $s \rightsquigarrow y$

$y+S(x) = S(x)+y$ regel 13b

$(y+x = x+y) \to (y+S(x) = S(x)+y)$ $\to$-I

$\forall x \forall y ($ "   "   " $)$ 2x $\forall$-I

Q.E.D.

3. $R \subset U \times U$ symmetrisch $(xRy \Leftrightarrow yRx)$

   + transitief $(xRy$ en $yRz \Rightarrow xRz)$

   + $\forall_{x \in U} \exists_{y \in U}\ xRy$ $(*)$

$\overset{?}{\Longrightarrow}$ R eq.rel. ie: symmetrisch, transitief, reflexief (xRx).

Bewijs: neem $z=y$ in transitiviteit $\Rightarrow xRy \wedge yRx \to xRx$

Volgens $(*)$ bestaat bij iedere x een y met xRy, dan geeft symmetrie $xRy \wedge yRx$, en dus xRx.

4. $U = P(V)$, $a \le b$ desd $a \subset b$, heeft supremum:

Stel $S \subset P(V)$, deze heeft altijd bovengrens $V \in P(V)$

Claim: $\boxed{\sup S = \cup S}$ N.B. $\cup S \subset V$ per def U.

Bewijs i) $\cup S$ is een bovengrens van S d.w.z.:

$\forall X \in S$ geldt $X \le \cup S$ i.e. $X \subset \cup S$ (*)

Klopt: $X \subset \cup S$ betekent: $z \in X \Rightarrow z \in \cup S$

$z \in \cup S$ betekent: $\exists X' \in S$ met $z \in X'$,

dus (*) zo: $\forall X \in S\ \forall z \in X\ \exists X' \in S\ z \in X'$

duidelijk: neem $X' = X$.

ii) $\cup S$ is kleinste bovengrens van S,

d.w.z. als $t \in P(V)$ zdd $\forall X \in S\ X \le t$,

dan $\cup S \le t$. Uitgeschreven:

$\forall t \subset V$ zdd $\underline{\forall X \in S: X \subset t} \overset{?}{\Rightarrow} \cup S \subset t$

$\cup S \subset t$ betekent $\forall X \in S\ \forall z \in X \Rightarrow z \in t$

$\Leftrightarrow \forall X \in S: X \subset t$

maar dat is precies de dubbel onderstreepte aanname,

dus de implicatie $\overset{?}{\Rightarrow}$ is triviaal. Q.E.D.

5a) $\forall_{x,y,z}\,((x+y=x+z)\rightarrow y=z)$ uit R1–R4. (4

Bewijs:

notatie: $-x \equiv I(x)$

$y \underset{R2,R3}{=} 0+y \underset{R4}{=} (-x+x)+y \underset{R1}{=} -x+(x+y)$

$\underset{\text{aanname}}{=} -x+(x+y) \underset{R1}{=} (-x+x)+z \underset{R4}{=} 0+z \underset{R2,R3}{=} z$

b) $A_1 \leq A_2 \Rightarrow A_1+A_3 \leq A_2+A_3$

(voor alle $A_1, A_2, A_3 \in \mathbb{R}$), met $\leq \equiv \subset$

$A_2+A_3 = \{r\in\mathbb{Q} \mid \exists_{p\in A_2}\exists_{q\in A_3}\ p+q=r\}$

$A_1+A_3 = \{r\in\mathbb{Q} \mid \exists_{p\in A_1}\exists_{q\in A_3}\ p+q=r\}$

$\exists_{p\in A_1} \rightarrow \exists_{p\in A_2}$ want $A_1\subset A_2$ dus

$r\in A_1+A_3 \Rightarrow r\in A_2+A_3 \Rightarrow A_1+A_3\subset A_2+A_3$

QED.

Bonusopgave: Bewijs op lemma.

$\forall_{q\in\mathbb{Q}}: ((\forall_{p\in X}\ p+q\in X+Y)\leftrightarrow q\in Y)$

$\leftarrow$ is triviaal, $\rightarrow$ is uitgedreven.

$\forall_{q\in\mathbb{Q}}\,(\forall_{p\in X}\exists_{p'\in X}\exists_{q'\in Y}\,(p+q=p'+q')\rightarrow q\in Y)$

Bewijs via RAA, stel $q\notin Y$, onderscheid:

① $Y=A_c$ voor zekere $c\in\mathbb{Q}$ en $q=c$

② $Y\neq A_c$ of $Y=A_c$ en $q>c$.

} etc etc wordt een moeras!