Tentamen Inleiding Wiskunde (NWI-WP029), 30-10-2017, 12:30–15:30

Kies vier van de volgende vijf vragen, die elk maximaal 2.5 punten opleveren (als je ze allemaal maakt tellen de beste vier mee).

1. Bekijk in propositielogica de uitspraak $(\beta \to (\gamma \to \delta)) \to (\gamma \to (\beta \to \delta))$, die we verder ψ noemen, en waarin β, γ, en δ zelf willekeurige uitspraken zijn.
   (a) Semantisch: laat zien dat ψ een tautologie is.
   (b) Syntactisch: geef een formeel bewijs van ψ (i.e. bewijs dat $\vdash \psi$).

2. Bewijs formeel in **PA** dat voor alle termen s, t, r geldt:
$$\mathbf{PA} \vdash (t = r) \to (t + s = r + s).$$
   Hint: inductie op de formule $\varphi(x) \equiv (y = z) \to (y + x = z + x)$.

3. Neem een *eindige* niet-lege verzameling u en definieer de verzameling v die bestaat uit alle functies $f : P(u) \to 2$ die voldoen aan:
   (i) $f(u) = 1$;
   (ii) $f(u \backslash a) = 1 - f(a)$, voor alle $a \subset u$;
   (iii) $f(a \cup b) = \max\{f(a), f(b)\}$ voor alle $a \subset u$ en $b \subset u$;[1]
   (a) Voor iedere $x \in u$ definiëren we een functie $\chi_x : P(u) \to 2$ door:
   $\chi_x(a) = 1$ als $x \in a$ en $\chi_x(a) = 0$ als $x \notin a$.
   Toon aan dat $\chi_x \in v$ (voor alle $x \in u$).
   (b) Toon aan dat voor iedere $a \subset u$ geldt: $f(a) = \max\{f(\{x\}) \mid x \in a\}$.
   (c) Laat zien dat er voor elke f in v precies één $x \in u$ is met $f(\{x\}) = 1$.
   (d) En daaruit dat de functie $g : u \to v$, gegeven door $g(x) = \chi_x$, een bijectie is.

4. Definieer de volgende relatie $\leqslant$ op $\mathbb{Z}$: $[a, b] \leqslant [c, d]$ desda $a + d \leq b + c$ (in $\mathbb{N}$).
   (a) Toon aan dat deze relatie welgedefinieerd is (d.w.z., als $[a', b'] = [a, b]$ en $[c', d'] = [c, d]$, dan $[a', b'] \leqslant [c', d']$ desda $[a, b] \leqslant [c, d]$).
   (b) Toon aan dat de relatie $\leq$ een totale (en dus in het bijzonder een partiële) ordening op $\mathbb{Z}$ definieert.

5. Stel R is een ring (denk aan $R = \mathbb{Q}$ of $R = \mathbb{R}$) met een *lineaire* partiële ordening $\leq$, die behalve aan de axioma's voor een partiële ordening tevens voldoet aan:
$$\mathbf{LO1} : \forall_x \forall_y \forall_z (x \leq y \to x + z \leq y + z);$$
$$\mathbf{LO2} : \forall_x \forall_y (0 \leq x \wedge 0 \leq y \to 0 \leq x \cdot y).$$
   Bewijs *uit de axioma's* **R**$\equiv$ **R1–R7** voor een ring en **LO**$\equiv$**LO1–LO2** dat
$$\mathbf{R}, \mathbf{LO} \vdash \forall_x (0 \leq x \to I(x) \leq 0);$$
$$\mathbf{R}, \mathbf{LO} \vdash \forall_x \forall_y \forall_z ((0 \leq x \wedge y \leq z) \to (x \cdot y \leq x \cdot z)).$$

Verwijs duidelijk naar resultaten in de syllabus (inclusief opgaven) die je gebruikt!

Veel succes!

---

1. Voor een eindige verzameling getallen $s \subset \mathbb{N}$ is $\max s$ het grootste getal in s.