Radboud Universiteit Nijmegen

Tussentoets Analyse 1 WP001B
11 april 2014, 12:30–14.00

Het gebruik van een rekenmachine en/of telefoon is niet toegestaan. U mag geen gebruik maken van het boek *Analysis I*.
Geef precieze argumenten en antwoorden. Maak uw redenering zo helder mogelijk.

---

1. Formuleer de stelling van Heine-Borel.

2. Gegeven twee rijen $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ en $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ van reële getallen.

   (a) Wanneer heet de rij $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ convergent?

   (b) Wanneer heet de rij $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ een Cauchy-rij?

   (c) Bewijs de volgende uitspraak: een convergente rij is een Cauchy-rij.

   (d) Veronderstel dat de rijen $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ en $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ convergent zijn. Bewijs dat de produktrij $(a_nb_n)_{n=0}^{\infty}$ convergent is.

3. Laat $X \subset \mathbb{R}$ en $Y \subset \mathbb{R}$.

   (a) Wanneer heet X een gesloten verzameling?

   (b) Veronderstel dat X en Y gesloten verzamelingen zijn. Bewijs dat $X \cap Y$ gesloten is.

4. Gegeven een rij $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, en veronderstel dat $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$. Bewijs dat de reeks $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absoluut convergent is.

ZOZ

5. Gegeven twee niet-nul rijen $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ en $(b_n)_{n=0}^{\infty}$.

   (a) Geef de definitie van een absoluut convergente reeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

   (b) Definieer de functie $f\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ door $f(n,m) = a_n b_m$, en veronderstel dat $\displaystyle\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} f(n,m)$ absoluut convergent is. Bewijs dat $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ en $\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} b_m$ dan absoluut convergent zijn.

   (c) Veronderstel dat de situatie van (b) geldt en definieer voor $p \in \mathbb{N}$ de eindige som $\displaystyle c_p = \sum_{k=0}^{p} a_k b_{p-k}$. Laat zien dat $\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} c_p$ absoluut convergent is en dat

$$\sum_{p=0}^{\infty} c_p = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m\right)$$

Normering						
Opgave	1	2	3	4	5	Totaal
Punten	8	12	8	10	12	50

Het onafgeronde cijfer voor de tussentoets S is het totaal aantal behaalde punten gedeeld door 5.

Summiere hints

Opgave 1
Theorem 9.1.24.

Opgave 2

(a) Definition 6.1.5.

(b) Definition 6.1.3.

(c) Proposition 6.1.12 (Exercise 6.1.5)
We weten dat $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ en dus
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N : \qquad |a_n - L| \leq \varepsilon.$$
We moeten bewijzen dat
$$\forall \varepsilon' > 0 \quad \exists M \in \mathbb{N} \quad \forall p, q \geq M : \qquad |a_p - a_q| \leq \varepsilon.$$
Kies $\varepsilon' > 0$ willekeurig, en stel $\varepsilon = \frac{1}{2}\varepsilon'$. Dan bestaat er een $N \in \mathbb{N}$ met voor alle $n \geq N$ geldt $|a_n - L| \leq \varepsilon = \frac{1}{2}\varepsilon'$. Kies $M = N$, dan voldoet deze M. Inderdaad, voor p en q willekeurig en beide groter dan M geldt
$$|a_p - a_q| \leq |a_p - L| + |a_q - L| \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = \varepsilon'.$$

(d) Theorem 6.1.19(b), Exercise 6.1.8, zie ook uitwerkingen op Blackboard.

Opgave 3

(a) Definition 9.1.15.

(b) We weten dat voor willekeurige verzamelingen $\overline{X \cap Y} \subset \overline{X} \cap \overline{Y}$ (Lemma 9.1.11). Dus
$$X \cap Y \subset \overline{X \cap Y} \subset \overline{X} \cap \overline{Y} = X \cap Y$$
waar in de eerste inclusie Lemma 9.1.11 wordt gebruikt, en in de laatste gelijkheid dat X en Y gesloten zijn. Dus $X \cap Y = \overline{X \cap Y}$ en $X \cap Y$ is gesloten.

Opgave 4
Theorem 7.5.1(a).

Opgave 5

(a) Definition 7.2.8.

(b) Als in het bewijs van de Stelling van Fubini (Theorem 8.2.2) bewijs dat $\sum_{n=0}^{N} |a_n b_m|$ van boven begrensd is voor elke N. Voor $b_m \neq 0$, dan volgt $\sum_{n=0}^{N} |a_n|$ begrensd en dus is de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ convergent.

(c) Gebruik een andere bijectie van $\mathbb{N}$ to $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ (door over lijnen $n + m = p$ te lopen voor de constante p van 0 tot ∞.)