Propedeuse Wiskunde 2012–2013, WP001B

Analyse 1

Tussentoets 22 maart, 10:45-12:30

Vermeld op de eerste bladzijde rechtsboven:

naam, studentnummer, opleiding en werkcollege-assistent

en verder op ieder blad je naam.

Het is geen openboektentamen en je mag ook geen gebruik maken van een rekenmachine of mobiele telefoon. Zorg dat je precieze argumenten en antwoorden geeft. Veel succes!

1. (5 punten) Laten $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ en $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ rijen in $\mathbb{R}$ zijn, $b \in \mathbb{R}$ en $k \in \mathbb{N}$ zodat, voor alle $n \in \mathbb{N}$,
$$|b_n - b| \leq k|a_n|.$$
Bewijs: als $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ convergeert naar 0, dan convergeert $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ naar b.

2. Laat $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ een rij in $\mathbb{R}$ zijn en $L \in \mathbb{R}$.
   (i) (1 punt) Wanneer noemen we L een limietpunt van $(a_n)_{n=0}^{\infty}$?
   (ii) (2 punten) Geef een voorbeeld van een rij met als limietpunten 0,1 en 2 (en geen andere limietpunten).
   (iii) (4 punten) Laat zien: L is een limietpunt van $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ dan en slechts dan als voor elke $\epsilon > 0$ geldt dat de verzameling $\{n \in \mathbb{N} \mid |a_n - L| < \epsilon\}$ oneindig is.

3. Laten $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ en $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ rijen in $\mathbb{R}$ zijn.
   (i) (2 punten) Wanneer noemen we de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ convergent? En wanneer absoluut convergent?
   (ii) (4 punten) Laat zien: als $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ begrensd is en de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ is absoluut convergent, dan is de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} b_n a_n$ convergent.

4. (5 punten) Laat $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ een collectie niet lege deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ zijn zodat hun vereniging $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n$ van boven begrensd is en

$$S_0 \subseteq S_1 \subseteq S_2 \subseteq \dots$$

Definieer een rij $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ door $a_n = \sup S_n$. Laat zien dat de rij $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ convergeert en bewijs dat

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n).$$

5. (i) (2 punten) Laat $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ een rij zijn in $\mathbb{R}$. Geef de definitie van de bovenlimiet $\limsup_{n\to\infty} a_n$ van $(a_n)_{n=0}^{\infty}$.

   (ii) (3 punten) Bewijs of geef een tegenvoorbeeld: Voor begrensde rijen $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ en $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ in $\mathbb{R}$ geldt:

$$\limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n = \limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n).$$

   (iii) (3 punten) Bewijs: Voor een begrensde rij $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ in $\mathbb{R}$ en $c \in \mathbb{R}$ met $c \geq 0$ geldt:

$$\limsup_{n\to\infty}(c \cdot a_n) = c \cdot \limsup_{n\to\infty}(a_n).$$

   Je mag gebruiken dat voor $A \subseteq \mathbb{R}$ begrensd en niet leeg en $x \in \mathbb{R}$ met $x \geq 0$:

$$\sup(\{x \cdot a \,|, a \in A\} = x \cdot \sup(A) \quad \text{en} \quad \inf(\{x \cdot a \,|, a \in A\} = x \cdot \inf(A).$$

   Geef je bewijs verder rechtstreeks vanuit de definitie van limsup (dus zonder andere stellingen over bovenlimieten te gebruiken).

Analyse 1
Tussentoets

Opgave 1: Zij $(a_n)_{n=0}^\infty$ en $(b_n)_{n=0}^\infty$ rijen in $\mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ en $k \in \mathbb{N}$ zijn zdd $\forall n \in \mathbb{N}: |b_n - b| \leq k|a_n|$

TB: Als $(a_n)_{n=0}^\infty$ naar 0 convergeert, dan convergeert $(b_n)_{n=0}^\infty$ naar b

Bew: Zij $\varepsilon > 0$ willekeurig. Als $k=0$, dan is $\forall n \geq 0$: $|b_n - b| \leq k|a_n| = 0 < \varepsilon$, dus convergeert $(b_n)_{n=0}^\infty$ naar b. Stel nu dat $k \neq 0$. Bepaal een $N \in \mathbb{N}$ zdd $\forall n \geq N$: $|a_n| < \frac{\varepsilon}{k}$. Dan is $\forall n \geq N$: $|b_n - b| \leq k|a_n| \leq k \cdot \frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon$, dus convergeert $(b_n)_{n=0}^\infty$ naar b.

Opgave 2: Zij $(a_n)_{n=0}^\infty$ een rij in $\mathbb{R}$ en $L \in \mathbb{R}$

(i) L heet een <u>limietpunt</u> van $(a_n)_{n=0}^\infty$ als $\forall \varepsilon > 0\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists n \geq N$ zdd $|a_n - L| < \varepsilon$

(ii) De rij $(0,1,2,0,1,2,0,1,2,\ldots)$ heeft precies de limietpunten 0, 1 en 2.

(iii) TB: L is een limietpunt van $(a_n)_{n=0}^\infty \iff \forall \varepsilon > 0$ is de verzameling $\{n \in \mathbb{N} \mid |a_n - L| < \varepsilon\}$ oneindig

Bew: ($\Longrightarrow$) Zij $\varepsilon > 0$ willekeurig. Stel $\{n \in \mathbb{N} \mid |a_n - L| < \varepsilon\}$ is eindig. Dan heeft deze een grootste element, zeg $M := \max\{n \in \mathbb{N} \mid |a_n - L| < \varepsilon\}$. Omdat L een limietpunt is van $(a_n)_{n=0}^\infty$ bestaat er een $k \in \mathbb{N}$ $k \geq M+1$ zdd $|a_k - L| < \varepsilon$. Nu is $k \in \{n \in \mathbb{N} \mid |a_n - L| < \varepsilon\}$ en $k > M$. $\lightning$, want M was het maximum van deze verzameling. Dus moet $\{n \in \mathbb{N} \mid |a_n - L| < \varepsilon\}$ oneindig zijn.

($\Longleftarrow$) Zij $\varepsilon > 0$ en $N \in \mathbb{N}$ willekeurig. Omdat $\{n \in \mathbb{N} \mid |a_n - L| < \varepsilon\}$ oneindig is, is $\{n \geq N \mid |a_n - L| < \varepsilon\} \neq \emptyset$, dus bestaat er een $k \geq N$ zdd $|a_k - L| < \varepsilon$. Hieruit volgt dat L een limietpunt is van $(a_n)_{n=0}^\infty$

Opgave 3: Zij $(a_n)_{n=0}^\infty$ en $(b_n)_{n=0}^\infty$ rijen in $\mathbb{R}$

(i) De reeks $\sum_{n=0}^\infty a_n$ heet <u>convergent</u> als de rij $\left(\sum_{n=0}^N a_n\right)_{N=0}^\infty$ van partiële sommen convergent is. De reeks $\sum_{n=0}^\infty a_n$ heet <u>**absoluut convergent**</u> als de reeks $\sum_{n=0}^\infty |a_n|$ convergent is.

(ii) Stel $(b_n)_{n=0}^\infty$ is begrensd en $\sum_{n=0}^\infty a_n$ is absoluut convergent

TB: $\sum_{n=0}^\infty b_n a_n$ is convergent

Bew: $(b_n)_{n=0}^\infty$ is begrensd, dus $\exists M \in \mathbb{R}$ zdd $\forall n \in \mathbb{N}$: $|b_n| \leq M$. De reeks $\sum_{n=0}^\infty a_n$ is absoluut convergent, dus is de rij van partiële sommen $\left(\sum_{n=0}^N |a_n|\right)_{N=0}^\infty$ begrensd; er bestaat een $K \in \mathbb{R}$ zdd $\sum_{n=0}^N |a_n| \leq K$ $\forall N \in \mathbb{N}$. Het is voldoende om te laten zien dat ook $\left(\sum_{n=0}^N |b_n a_n|\right)_{N=0}^\infty$ een begrensde rij is. Zij $N \in \mathbb{N}$ willekeurig. Dan is $\sum_{n=0}^N |b_n a_n| = \sum_{n=0}^N |b_n||a_n| \leq \sum_{n=0}^N M|a_n| = M \cdot \sum_{n=0}^N |a_n| \leq MK$. Dus is $\left(\sum_{n=0}^N |b_n a_n|\right)_{N=0}^\infty$ begrensd
$\Rightarrow \sum_{n=0}^\infty b_n a_n$ is absoluut convergent en dus ook convergent

Opgave 4: Zij $\{S_n\}_{n=0}^\infty$ een collectie niet-lege verzamelingen zdd $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n$ van boven begrensd is en $S_0 \subseteq S_1 \subseteq S_2 \subseteq \ldots$. Definieer $(a_n)_{n=0}^\infty$ door $a_n := \sup(S_n)$.

TB: De rij $(a_n)_{n=0}^\infty$ convergeert en $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n\right)$.

Bew: We bewijzen dat $(a_n)_{n=0}^\infty$ stijgend is en van boven begrensd.

- [(a_n) stijgend] Zij $n \in \mathbb{N}$ willekeurig. Stel $a_n > a_{n+1}$. Dan is $\sup(S_n) > \sup(S_{n+1})$, dus $\sup(S_{n+1})$ is geen bovengrens voor $S_n \Rightarrow \exists x \in S_n$ zdd $\sup(S_{n+1}) < x \leq \sup(S_n)$. Voor deze x geldt dus $x \in S_n$, maar $x \notin S_{n+1}$ $\lightning$, want $S_n \subseteq S_{n+1}$. Er moet dus gelden dat $a_n \leq a_{n+1}$ en dus (met inductie) $a_n \leq a_m$ $\forall n,m \in \mathbb{N}$ $n \leq m$, dus $(a_n)_{n=0}^\infty$ is stijgend.
- [(a_n) begrensd] We weten $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n$ is van boven begrensd, dus $L := \sup\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n\right) \in \mathbb{R}$. Zij $k \in \mathbb{N}$ willekeurig. Dan is $S_k \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n$, dus (op dezelfde manier als hierboven) $a_k = \sup(S_k) \leq \sup\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n\right) = L$, dus is $(a_n)_{n=0}^\infty$ begrensd.

Omdat $(a_n)_{n=0}^\infty$ stijgend en van boven begrensd is $(a_n)_{n=0}^\infty$ convergent en $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$.

Nog te bewijzen: $\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n = \sup\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n\right) = L$:

($\leq$) $a_n \leq L \ \forall n \in \mathbb{N}$ (zie hierboven) dus $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n \leq L$

($\geq$) Zij $x \in \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} S_n$. Dan $\exists k \in \mathbb{N}$ zodat $x \in S_k$, dus is $x \leq \sup S_k = a_k \leq \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} (a_n)$. Omdat x willekeurig was, geldt: $\sup\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} S_n\right) \leq \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} (a_n)$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n = \sup\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} S_n\right)$ $\square$

<u>Opgave 5</u>: Zij $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ een rij in $\mathbb{R}$

(i) De <u>**bovenlimiet**</u> van $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ is $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n := \inf\limits_{N\in\mathbb{N}} (a_N^+)$, waarbij $a_N^+ := \sup\limits_{n\geq N} (a_n)$

(ii) Voor begrensde rijen $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ en $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ hoeft niet te gelden $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n + \limsup\limits_{n\to\infty} b_n = \limsup\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n)$. Neem $a_n := (-1)^n$ en $b_n := (-1)^{n+1}$. Dan is:

- $\limsup\limits_{n\to\infty} (a_n) = \limsup\limits_{n\to\infty} (b_n) = 1$
- $\limsup\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \limsup\limits_{n\to\infty} ((-1)^n + (-1)^{n+1}) = \limsup\limits_{n\to\infty} ((-1)^n + (-1)(-1)^n) = \limsup\limits_{n\to\infty} (0) = 0$,

dus geldt niet $\limsup\limits_{n\to\infty} (a_n) + \limsup\limits_{n\to\infty} (b_n) = \limsup\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n)$

(iii) Zij $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ een begrensde rij in $\mathbb{R}$ en $c \in \mathbb{R}$, $c \geq 0$.

<u>TB</u>: $\limsup\limits_{n\to\infty} (ca_n) = c \limsup\limits_{n\to\infty} (a_n)$

<u>Bew</u>:
$$\limsup_{n\to\infty} (ca_n) := \inf_{N\geq 0} \left(\sup_{n\geq N} (ca_n)\right) = \inf_{N\geq 0} (\sup\{ca_n \mid n \geq N\}) = \inf_{N\geq 0} (c \cdot \sup\{a_n \mid n \geq N\})$$
$$= \inf_{N\geq 0} \left(c \sup_{n\geq N} (a_n)\right) = \inf\left\{c \sup_{n\geq N} (a_n) \mid N \geq 0\right\} = c \inf\left\{\sup_{n\geq N} (a_n) \mid N \geq 0\right\}$$
$$= c \cdot \inf_{N\geq 0} \left(\sup_{n\geq N} (a_n)\right) = c \limsup_{n\to\infty} (a_n)$$
$\square$