Propedeuse Wiskunde 2012–2013, WP001B

Analyse 1

Tentamen: 4 juli 2013, 12:30-15:30

Vermeld op de eerste bladzijde rechtsboven:

naam, studentnummer, opleiding en naam WC-assistent

en verder op ieder blad je naam.

Het gebruik van een rekenmachine en/of telefoon is niet toegestaan. Je mag geen gebruik maken van het boek Analysis I. Geef precieze argumenten en antwoorden.

1. Zij $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ een rij in $\mathbb{R}$. Definieer $s = sup(\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\})$. Neem aan: $s \in \mathbb{R}$.

   (i) (2 punten) Geef een voorbeeld van een dergelijke rij $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ met $s \neq \limsup_{n\to\infty} a_n$.

   (ii) (4 punten) Laat zien: als $a_n \neq s$, voor alle $n \in \mathbb{N}$, dan $s = \limsup_{n\to\infty} a_n$.

2. Zij $(c_n)_{n\geq 0}$ een rij. Definieer de rijen $(a_n)_{n\geq 0}$ en $(b_n)_{n\geq 0}$ door, voor $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} c_k \quad \text{en} \quad b_n = \sum_{k=0}^{n} |c_k|.$$

   Ga van elk van de volgende uitspraken na of ze waar zijn voor alle rijen $(c_n)_{n\geq 0}$ in $\mathbb{R}$. Geef een bewijs of anders een tegenvoorbeeld.

   (i) (3 punten) Als de rij $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ convergeert, dan convergeert de rij $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ ook.

   (ii) (3 punten) Als de rij $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ convergeert, dan convergeert de rij $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ ook.

3. (4 punten) Zij $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continu zodat $f(x) = 0$ voor alle $x \in \mathbb{Q}$. Bewijs: $f(x) = 0$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.

4. Zij $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$ en laat $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ een differentieerbare functie zijn met

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\in(a,b)}} f(x) = +\infty = \lim_{\substack{x\to b\\ x\in(a,b)}} f(x).$$

   (i) (1 punt) Geef de definitie van van $\lim_{\substack{x\to a\\ x\in(a,b)}} f(x) = +\infty$.

   (ii) (5 punten) Laat zien dat er een $c \in (a,b)$ bestaat met $f'(c) = 0$.

Z.O.Z.

5. (5 punten) Zij $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$, $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continu. We hebben bewezen dat f dan Riemann integreerbaar is.
Laat zien: er bestaat een $c \in (a,b)$ met

$$\int_{[a,b]} f = f(c)\,(b-a)$$

6. (5 punten) Zij $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$, $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ begrensd. Neem aan: voor alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ met $\frac{1}{n} < \frac{b-a}{2}$ is f Riemann integreerbaar op $[a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}]$. Bewijs dat f Riemann integreerbaar is op $[a,b]$.