Propedeuse Wiskunde 2011–2012, WP001B

# Analyse 1

**Tentamen: 3 juli 2012, 14:00–17:00**

*Vermeld op de eerste bladzijde rechtsboven:*

**naam, studentnummer, opleiding en naam WC-assistent**

*en verder op ieder blad je naam.*

*Het gebruik van een rekenmachine en/of telefoon is niet toegestaan. Je mag geen gebruik maken van het boek Analysis I. Geef precieze argumenten en antwoorden.*

1. Zij $A \subseteq \mathbb{R}$ en zij $x \in \mathbb{R}$.

   (i) (2 punten)
   Geef de definities van '$x$ is het supremum van $A$', '$x$ is een adherentiepunt van $A$' en '$x$ is een limietpunt van $A$'.

   (ii) (8 punten)
   Neem aan dat $A$ begrensd is. Ga van de volgende uitspraken na of ze waar zijn. Geef een bewijs of een tegenvoorbeeld.

   (a) Het supremum van $A$ is een adherentiepunt van $A$.

   (b) Het supremum van $A$ is een adherentiepunt van het complement van $A$ (het complement van $A$ is de verzameling $\mathbb{R}\backslash A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \notin A\}$).

   (c) Het supremum van $A$ is een limietpunt van $A$.

   (d) Stel dat $x \in \mathbb{R}$ een limietpunt is van $A$. Dan geldt: $x \leq sup(A)$.

2. Beschouw de rij reële getallen $(a_n)_{n=0}^{\infty}$.

   (i) (2 punten)
   Wanneer heet de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ convergent? En wanneer absoluut convergent?

   (ii) (3 punten)
   Bewijs: als de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ convergent is, dan is de rij $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ convergent en $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

   (iii) (3 punten)
   Bewijs: als de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absoluut convergeert, dan convergeert ook de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n)^2$.

   (iv) (3 punten)
   Geldt de uitspraak in (iii) ook als we slechts aannemen dat de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ convergent is (i.p.v. absoluut convergent)?

3. (i) (2 punten)
   Formuleer de tussenwaardestelling (Intermediate Value Theorem).

   (ii) (4 punten)
   Zij $f\colon [0,5] \to \mathbb{R}$ een continue functie met $f(0) = f(5)$. Laat zien dat er een $c \in [0,4]$ bestaat met $f(c) = f(c+1)$.

4. Zij $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$ en zij $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$.

   (i) (2 punten)
   Wanneer heet $g$ Riemann integreerbaar op $[a,b]$?

   Neem vanaf nu aan dat $f, g \geq 0$ (d.w.z., $f(x) \geq 0$ en $g(x) \geq 0$, voor alle $x \in [a,b]$).

   (ii) (4 punten)
   Bewijs: als $g$ Riemann integreerbaar is met $\int_{[a,b]} g = 0$ en $f$ is begrensd, dan is de functie $g \cdot f$ Riemann integreerbaar en $\int_{[a,b]} g \cdot f = 0$.

   Neem vanaf nu aan dat $f$ continu is op $[a,b]$.

   (iii) (2 punten)
   Formuleer de Heine-Borel stelling.

   (iv) (4 punten)
   Gebruik de Heine-Borel stelling om te bewijzen dat $f$ begrensd is.

   Uit het maximumprincipe volgt dat $f$ zijn maximum bereikt in een punt $x_{max} \in [a,b]$ en dat $f$ zijn mimimum bereikt in een punt $x_{min} \in [a,b]$. Neem vanaf nu verder aan dat $g$ en $g \cdot f$ beide Riemann integreerbaar zijn op $[a,b]$.

   (v) (4 punten)
   Laat zien: er bestaat een getal $c \in [f(x_{min}), f(x_{max})]$ met

$$\int_{[a,b]} g \cdot f = c \cdot \int_{[a,b]} g.$$

   (Hint: onderscheid de gevallen $\int_{[a,b]} g = 0$ en $\int_{[a,b]} g \neq 0$).

   (vi) (3 punten)
   Laat zien: er bestaat een getal $q \in [a,b]$ met $\int_{[a,b]} g \cdot f = f(q) \cdot \int_{[a,b]} g$.