Propedeuse Wiskunde 2011–2012, WP001B

Analyse 1

Hertentamen: 9 augustus 2012, 14:00–17:00

Vermeld op de eerste bladzijde rechtsboven:
naam, studentnummer, opleiding en naam WC-assistent
en verder op ieder blad je naam.

Het gebruik van een rekenmachine en/of telefoon is niet toegestaan. Je mag geen gebruik maken van het boek Analysis I. Geef precieze argumenten en antwoorden.

1. Zij $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ een rij van reële getallen.

   (i) (2 punten)
   Wanneer heet de rij $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ convergent? Wanneer heet de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ convergent?

   (ii) (3 punten)
   Laat zien: als de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ convergent is, dan is de rij $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ convergent en $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

   (iii) (6 punten)
   Geef bij de volgende onderdelen een voorbeeld van een rij die aan de voorwaarde voldoet of beargumenteer waarom een dergelijke rij niet bestaat.

   (a) Een rij waarin de waarden 0 en 1 niet voorkomen met een convergente deelrij met limiet 0 en een convergente deelrij met limiet 1.

   (b) Een onbegrensde rij met een convergente deelrij.

   (c) Een monotoon stijgende divergente rij met een convergente deelrij.

   (d) Een rij met een begrensde deelrij, maar zonder convergente deelrij.

2. (i) (2 punten)
   Formuleer de middelwaardestelling (Mean Value Theorem).

   (ii) (4 punten)
   Zij $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$. Zij $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ differentieerbaar met $f'(x) = 0$, voor alle $x \in (a,b)$. Laat (met behulp van de middelwaardestelling) zien dat f constant is.

(Vervolg Opgave 2)

(iii) (2 punten)
Formuleer de Tweede Hoofdstelling van de Integraalrekening (Second Fundamental Theorem of Calculus).

(iv) (3 punten)
Zij $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ zoals in onderdeel (ii) en neem verder aan dat de afgeleide f' Riemann integreerbaar is. Geef een bewijs van de uitspraak in onderdeel (ii) met behulp van de Tweede Hoofdstelling van de Calculus.

3. Zij $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de functie gegeven door

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{als}\, x > 0 \\ 1 & \text{als}\, x = 0. \end{cases}$$

(i) (4 punten)
Bewijs dat f Riemann integreerbaar is op $[0,1]$ en bepaal $\int_{[0,1]} f$.

(ii) (4 punten)
Laat zien dat f geen primitieve heeft op $[0,1]$. (Hint: je mag opgave 2(ii) gebruiken).

4. (i) (2 punten)
Zij $A \subseteq \mathbb{R}$. Geef de definitie van de afsluiting van A (notatie $\overline{A}$). Wanneer heet A gesloten?

(ii) (3 punten)
Neem aan dat A begrensd en niet leeg is. Laat zien: $sup(A) \in \overline{A}$, waarbij $sup(A)$ het supremum van A is.

Beschouw een functie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en een punt $a \in \mathbb{R}$.

(iii) (2 punten)
Wanneer heet f continu in a?

(iv) (4 punten)
Voor $S \subseteq \mathbb{R}$, definiëren we: $f^{-1}(S) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in S\}$. Laat zien: als f continu is op $\mathbb{R}$ dan geldt voor alle $A \subseteq \mathbb{R}$:

$$\overline{f^{-1}(A)} \subseteq f^{-1}(\overline{A}).$$

(v) (3 punten)
Neem aan dat $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continu is en dat $f(x) = 0$ voor alle $x \in \mathbb{Q}$. Laat zien dat $f(x) = 0$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.

(vi) (3 punten)
Bewijs de omkering van onderdeel (iv), d.w.z. laat zien: als voor alle $A \subseteq \mathbb{R}$ geldt $\overline{f^{-1}(A)} \subseteq f^{-1}(\overline{A})$, dan is f continu op $\mathbb{R}$.