Radboud Universiteit Nijmegen

Tussentoets Analyse 1 WP001B
13 april 2011, 13:45–15.30

Het gebruik van een rekenmachine en/of telefoon is niet toegestaan. U mag geen gebruik maken van het boek *Analysis I*.
Geef precieze argumenten en antwoorden. Maak uw redenering zo helder mogelijk.

---

1. Gegeven zijn twee verzamelingen X en Y en een functie $f\colon X \to Y$.

   (a) Voor willekeurige verzameling $U \subset X$ en $S \subset Y$, geef de definitie van $f(U)$ en $f^{-1}(S)$.

   (b) Laat zien dat voor $U \subset Y$ en $V \subset Y$, geldt $f^{-1}(U \setminus V) = f^{-1}(U) \setminus f^{-1}(V)$.

   (c) Bewijs dat $f(f^{-1}(S)) = S$ voor elke $S \subset Y$ dan en slechts dan als f surjectief is.

2. Gegeven twee rijen $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ en $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ van reële getallen.

   (a) Wanneer heet de rij $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ convergent?

   (b) Wanneer heet de rij $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ begrensd?

   (c) Bewijs de volgende uitspraak: een convergente rij is begrensd.

   (d) Veronderstel dat de rijen $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ en $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ convergent zijn. Bewijs dat de produktrij $(a_nb_n)_{n=0}^{\infty}$ convergent is.

3. Laat $X \subset \mathbb{R}$.

   (a) Geef de definitie van de afsluiting $\overline{X}$.

   (b) Geef de definitie van een gesloten verzameling in $\mathbb{R}$.

   (c) Bewijs dat de afsluiting $\overline{X}$ gesloten is.

ZOZ

4. Gegeven twee niet-nul rijen $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ en $(b_n)_{n=0}^{\infty}$.

   (a) Geef de definitie van een absoluut convergente reeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

   (b) Definieer de functie $f\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ door $f(n,m) = a_n b_m$, en veronderstel dat $\displaystyle\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} f(n,m)$ absoluut convergent is. Bewijs dat $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ en $\sum_{m=0}^{\infty} b_m$ dan absoluut convergent zijn.

   (c) Veronderstel dat de situatie van (b) geldt en definieer $c_p = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_k b_{p-k}$. Laat zien dat $\sum_{p=0}^{\infty} c_p$ absoluut convergent is en dat

$$\sum_{p=0}^{\infty} c_p = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m\right)$$

Normering					
Opgave	1	2	3	4	Totaal
Punten	8	10	8	14	40

Het onafgeronde cijfer voor de tussentoets S is het totaal aantal behaalde punten gedeeld door 4.

Summiere hints

Opgave 1

(a) Definitions 3.4.1 en 3.4.4.

(b) Exercise 3.4.4.

(c) Exercise 3.4.5.

Opgave 2

(a) Definition 6.1.5.

(b) Definition 6.1.16.

(c) Corollary 6.1.17.

(d) Theorem 6.1.19(b).

Opgave 3

(a) Definition 9.1.10.

(b) Definition 9.1.15

(c) $X \subset \overline{X}$, dus $\overline{X} \subset \overline{\overline{X}}$. Kies $x \in \overline{\overline{X}}$, dan bestaat er voor iedere $\varepsilon > 0$ een $y \in \overline{X}$ met $|x - y| \leq \frac{1}{2}\varepsilon$. Omdat $y \in \overline{X}$ bestaat er een $w \in X$ met $|y - w| \leq \frac{1}{2}\varepsilon$. Dan geldt dus ook

$$|x - w| \leq |x - y| + |y - w \ \leq \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$$

en dus $x \in \overline{X}$.

Opgave 4

(a) Definition 7.2.8.

(b) Als in het bewijs van de Stelling van Fubini (Theorem 8.2.2) bewijs dat $\sum_{n=0}^{N} |a_n b_m|$ van boven begrensd is voor elke N. Voor $b_m \neq 0$, dan volgt $\sum_{n=0}^{N} |a_n|$ begrensd en dus is de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ convergent.

(c) Gebruik een andere bijectie van $\mathbb{N}$ to $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ (door over lijnen $x + y =$ constant te lopen voor de constante van 0 tot ∞.)